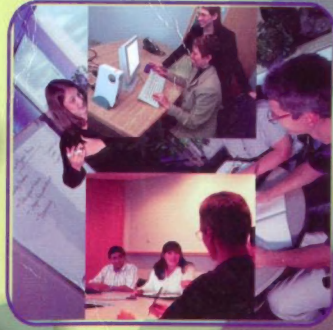


محمد راتول

بحوث العمليات



ديوان المطبوعات الجامعية

محمد راتول

بحوث العمليات

O P U

Conception: O.P.U.V.S



المؤلف من مواليد 13 جانفي 1963 بولاية تسمسليت، أتم دراسته الجامعية بجامعة الجزائر حيث حصل على شهادة دكتوراه دولة في العلوم الاقتصادية، إبتداءً التدريس الجامعي سنة 1987 كمعيد بمعهد العلوم السياسية والعلاقات الدولية و معهد العلوم الاقتصادية بجامعة الجزائر، لينتقل سنة 1989 إلى جامعة الشلف حيث يشغل بها حاليا منصب أستاذ محاضر، ومشرفا علميا على الماجستير في النقود والمالية، كما شغل منصب عميد كلية العلوم الإنسانية و العلوم الاجتماعية لغاية سبتمبر 2003، ويدير حاليا مخبر العولمة و شمال إفريقيا الذي أنشأه بالجامعة سنة 2003. الكتاب الذي بين يديك عبارة عن مجموعة من المواضيع الجوهرية المنقحة في بحوث العمليات، قدمها كمحاضرات لعدة تخصصات لها علاقة بالعلوم الاقتصادية و علوم التسيير، وقد حرص في تقديمها على البساطة في السرد و المنهجية في العرض، مبتعدا قدر الإمكان عن أسلوب العرض الرياضي البحت، معتمدا في الشرح و التوضيح على الأمثلة ذات التطبيقات الاقتصادية المباشرة في الغالب، و مجتهدا في إستعمال أنسب المصطلحات، وقد إحتوى عددا لا بأس به من المواضيع الهادفة إلى التسيير الأمثل للموارد الاقتصادية، وهذا من خلال ستة عشر فصلا مستقلا، مراعى فيها الترتيب حسب الأهمية البيداغوجية و العلمية. وإد يقدم هذا العمل المتواضع، فإنه لا يسعه إلا أن يطلب من القارئ أن يفيدته بملاحظاته حول أي خطأ مهما كان، أو أية ملاحظة، وهذا لتأهيله مستقبلا، ليكون مرجعا معتمدا ذا قيمة بيداغوجية عالية إن شاء الله.



4619

390 دج

الدكتور
محمد راتول

بحوث العمليات

الطبعة الثانية



ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

الى الوالدين الكريمين
و عمي الحاج محمد
الى حرمي المصون...
الى الأبناء...
محمد و محمد المالك.
ملیكة و فاطمة الزهراء.

© ديوان المطبوعات الجامعية 2006-12

رقم النشر: 4.01.4619

رقم ر.د.م.ك (ISBN): 9961.0.0735.2

رقم الإيداع القانوني: 2004/1601.

فصول الكتاب

الصفحة	مخوان الفصل
1	مقدمة.
3	مدخل: بحوث العمليات، مفهوما و طورها
9	الفصل الأول: البرمجة الخطية مفهوما و تطبيقاتها
25	الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي بيانيا.
41	الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام- طريقة السمبليكس
81	الفصل الرابع: الثنائية.
95	الفصل الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة.
103	الفصل السادس: مسائل النقل - تصغير التكاليف -
145	الفصل السابع: مسائل النقل - تعظيم الأرباح و العوائد-
155	الفصل الثامن: مسائل التخصيص
181	الفصل التاسع: نظرية القرارات
209	الفصل العاشر: مدخل لنظرية البيانات
225	الفصل الحادي عشر: نظرية الشجرة المثلى
245	الفصل الثاني عشر: نظرية المسارات المثلى
271	الفصل الثالث عشر: نظرية التدفق الأعظمي - فورد فبلكرسون -
289	الفصل الرابع عشر: تحليل شبكات الأعمال - طريقة المسار الحرج - C.P.M -
335	الفصل الخامس عشر: أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات - P.E.R.T -
347	الفصل السادس عشر: التفسير الأمثل للخزون

مقدمة.

الكتاب الذي بين يديك عبارة عن مجموعة من المواضيع الجوهرية المنقحة في بحوث العمليات، قُدمت كمحاضرات لعدة تخصصات لها علاقة بالعلوم الاقتصادية، وقد حرصت في تقديمها على البساطة في السرد و المنهجية في العرض، مبتعدا قدر الإمكان عن أسلوب العرض الرياضي البحت، متوخيا في ذلك تسهيل فهم المواضيع باعتبار المطبوعة موجهة أساسا لطلبة فروع علوم الاقتصاد و التسيير و التجارة، معتمدا في الشرح و التوضيح على الأمثلة ذات التطبيقات الاقتصادية المباشرة في الغالب، و مجتهدا في إستعمال أنسب المصطلحات، و قد إحتوى عددا لا بأس به من المواضيع الهادفة الى التسيير الأمثل للموارد الاقتصادية، و هذا من خلال ستة عشر فصلا مستقلا، مراعى فيها الترتيب حسب الأهمية البيداغوجية و العلمية، و هي مرتبة على النحو التالي:

الفصل الأول: البرمجة الخطية مفهومها و إستخداماتها.

الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي بيانيا.

الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام - طريقة السمبليكس.

الفصل الرابع: الثنائية.

الفصل الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة.

الفصل السادس: مسائل النقل - تدنئة التكاليف -.

الفصل السابع: مسائل النقل - تعظيم الأرباح و العوائد -.

الفصل الثامن: مسائل التخصيص.

الفصل التاسع: نظرية القرارات

الفصل العاشر: مدخل لنظرية البيانات.

الفصل الحادي عشر: نظرية الشجرة المثلى.

الفصل الثاني عشر: نظرية المسارات المثلى.

الفصل الثالث عشر: نظرية التدفق الأعظمي

الفصل الرابع عشر: تحليل شبكات الأعمال-طريقة المسار الحرج

-CPM

الفصل الخامس عشر: أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات PERT

الفصل السادس عشر: التسيير الأمثل للمخزون

و قد أنهيت كل فصل بمجموعة من التمارين التطبيقية، لتكون نموذجاً للتدريب في حصص الأعمال الموجهة.

و إذ أقدم هذا العمل المتواضع لطلبتنا و أساتذتنا، فإنه لايسعني إلا أن أطلب من القاريء أن يفيدني بملاحظاته حول أي خطأ مهما كان، أو أية ملاحظة، وهذا لتأهيله مستقبلاً، ليكون مرجعاً معتمداً ذا قيمة بيداغوجية عالية إن شاء الله.

الأستاذ: م.راتول.

مدخل

بحوث العمليات، مفهومها و تطورها

لا يوجد تعريف واحد محدد شافي لبحوث العمليات، حيث اختلفت تعاريفها بين روادها، فهناك من يعرفها بأنها "طريقة علمية لإمداد الإدارة التنفيذية بأساس كمي للقرارات الخاصة بالعمليات تحت رقابتهم" و هو التعريف الذي أعطاه كل من G.KIMBALL و P.MORSE لبحوث العمليات، أو أنها "إستخدام الطرق العلمية و الأساليب و الأدوات لحل المشاكل التي تحتوي على عمليات النظم لإمداد المديرين بالحلول المثلى للمشاكل" و هو التعريف الذي قدمه كل من R.ACKOFF و G.CHORCHMAN، أو هي "نظرية القرارات التطبيقية و إستخدام الطرق العلمية و الرياضية في حل المشاكل التي تواجه التنفيذ" و هو التعريف الذي أعطاه M.STARR و M.MILLER، أو أنها "إستخدام المنهج العلمي لحل المشاكل للمديرين التنفيذيين" كما يعرفها H.WANGER، و هي تعاريف تكاد تشترك في بعض المصطلحات الأساسية، و لعل أهم المصطلحات التي شملتها هذه التعاريف، الطريقة العلمية، الأساليب و الأدوات -و يقصد بها الأساليب الرياضية و الإحصائية-، مشاكل المديرين، القرارات، الحلول المثلى، و هي مصطلحات تنم عن فهم كل باحث لبحوث العمليات، غير أننا نرى أن بحوث العمليات تطورت لتأخذ مفهوم أوسع، لدرجة أن هناك من يضيفي صفة العلمية عليها لتطورها المستمر و إستخدامها لأساليب البحث العلمي فيقول "إن علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعة من الطرق و الوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الإستخدام الأفضل للموارد

البشرية المتاحة" و هو التعريف الذي يدلي به د. موفق محمد الكبيسي في كتابه المشار إليه في قائمة المراجع، و هو تعريف مشابه للتعريف الذي يقدمه د. محمد محمد كعبور في الكتاب المشار إليه أيضا في قائمة المراجع، و من جهتي فإن التعريف الذي أكاد أستقر عليه و الذي تبلور لدي على إمتداد فترة تدريسي لهذا المقياس هو أن " بحوث العمليات هي مجموعة الطرق والأساليب العلمية المساعدة لإتخاذ قرارات التسيير العلمي الأمثلي في الإدارة، و هي تعتمد على القياس الكمي بمساعدة الأساليب الإحصائية والرياضية، جوهر ما تتناوله هو البحث عن أمثلية تسيير الموارد المادية و البشرية في مختلف المؤسسات في ظل ظروف كمية محددة".

وقد سميت بحوث العمليات لكون أولى البحوث وتطبيقاتها في هذا المجال كانت على العمليات الحربية. و رغم أن ميلاد طرق بحوث العمليات كان في سنة 1936 في بريطانيا، إلا أن نشوءها الحقيقي كان خلال فترة الحرب العالمية الثانية عندما دعت الإدارة العسكرية الإنجليزية فريقا من العلماء من جامعة مانشيستر برئاسة الأستاذ PMS BLACKETT لدراسة المشاكل التقنية و الإستراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا، إذ كان هدف الفريق هو الإستخدام الأمثلي للموارد الحربية المحدودة، و قد أدى ذلك الى نتائج جيدة على مستوى تحسين منظومة الرادار و الدفاع المدني، وهو ما أدى بإدارة الحرب الأمريكية الى إجراء دراسات مماثلة بمبادرة من كل من B. James رئيس لجنة بحوث الدفاع و B. ANNEVAR رئيس لجنة الأسلحة و المععدات الجديدة و ذلك لكونهما شاهدا إستخدام هذا الأسلوب في بريطانيا أثناء إقامتهم بها خلال فترة الحرب العالمية الثانية.

بعد أكتوبر 1942 شكلت القوات الجوية الثانية المرابطة في بريطانيا أول فريق لتحليل العمليات الحربية، تلاها السلاح البحري الأمريكي الذي شكل فريقين أحدهما في مصنع المعدات البحرية و ترأسه J. ELLISA و الثاني في الأسطول العاشر و ترأسه M. PHILIP و قد واصل القادة العسكريون الإهتمام بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات و التي تحولت فيما بعد الى مؤسسة بحوث العمليات.

و نظرا للنجاح الذي لقيه هذا الأسلوب في إدارة العمليات الحربية فقد تم نقله للإدارة المدنية و بخاصة الى إدارة الأعمال والمشاريع الاقتصادية، و قد قام في بريطانيا فريق من الباحثين بتأسيس نادي بحوث العمليات سنة 1948 و الذي حول الى جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة و التي أصدرت أول مجلة علمية ربع سنوية لها سنة 1950. كما تم تأسيس جمعية بحوث العمليات الأمريكية و معهد الإدارة العلمية سنة 1950 في الولايات المتحدة، و قد أصدرت الجمعية أول مجلة لها هي مجلة " بحوث العمليات " سنة 1952 كما أصدر المعهد أيضا " مجلة الإدارة العلمية " سنة 1953 و هذا ما ساعد على شق الطريق لتنمية هذا الأسلوب وإستخداماته في مختلف مجالات التسيير ومجالات إتخاذ القرارات.

و على المستوى الفردي و في الجانب المدني ساهم الكثير من الرواد في بعث بحوث العمليات، فقد ظهرت بعض أساليبها تحت عنوان الإدارة العلمية بمساهمة العديد من رواد هذه الإدارة، حيث ساهم كل منهم في إظهار فكرة من الأفكار المستخدمة في التسيير الأمثلي، و على سبيل المثال قام كل من فريدريك تايلور F.W.TAYLOR و هنري فايول H.FAYOL و جيلبرت GILBERT و ألتون مايو A.MAYO

باستخدام الطرق العلمية في الإنتاج وتطبيق مبدأ التخصص وظهور الدراسات الخاصة بالوقت والحركة، ومن الرواد أيضا GANTT (1919-1966)، حيث استخدم الرسومات البيانية لتوضيح الأعمال المختلفة للمشروع وإظهار الوقت اللازم، حيث تطورت أفكاره بظهور أسلوب تقويم البرامج ومراجعة التقنيات المعروف بأسلوب بيرت PERT، كما قام المهندس الدانماركي إرنلنج A.K.ERLANG سنة 1907 والذي كان موظفا بشركة كوبنهاجن للهاتف، بدراسة مشكلة الإزدحام على الخطوط الهاتفية لتتطور أفكاره بإدخال الأساليب الرياضية في إبداع نظرية طوابير الانتظار والمنسوبة إلى ماركوف، كما ظهرت المحاولة الأولى لصياغة نظرية المباريات في صورة رياضية عن طريق أميل بوريل E.BOREL سنة 1921 والتي طورها فيما بعد نيومان J.V.NEWMAN سنة 1928، وإلى ذلك أيضا قام العالم الأمريكي جورج دونتزيغ G.DANTZIG سنة 1949 بتطوير طريقة لحل مشاكل التعظيم والتدنية بأسلوب جديد هو أسلوب البرمجة الخطية باستخدام طريقة سميت بطريقة السمليكس أو طريقة دونتزيغ، حيث استخدمت لأول مرة من طرف شركات البترول الأمريكية في تخطيط الإنتاج. وساهم الاقتصادي الروسي كونتروفيتش KANTROVICH بتقديم أبحاث عن مشاكل الاستخدام الأمثل للموارد سنة 1939، أما مسائل النقل فقد قام العالم الأمريكي فوجل VOGEL بصياغة طريقة حلها كما قام كل من A.CHARNES و K.KOOPER بتطوير طريقة التوزيع المعدل المستعملة في مسائل النقل، وفي ما يتعلق بمسائل شبكات الأعمال فقد قام العالمان الأمريكيان WALKER و J.KELLY سنة 1957 باستخدام طريقة المسار

الخرج المسماة CPM، كما قام فريق من العلماء الأمريكيين بتطوير بعض النماذج الأخرى كنموذج المخزون لويلسون. ويظهر أن ظهور بحوث العمليات جاء نتيجة الحاجة في الإقتصاد والحاجة في التسيير الأمثل لمختلف نواحي التسيير الإداري للموارد، وعلى فترات زمنية طويلة نسبيا امتدت لتغطي تقريبا كامل فترة القرن العشرين.

منهج بحوث العمليات: تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداء من بناء النموذج إلى حله واختباره فطبيقه، كون أن التحضير لإتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي:

- تحديد المشكلة وتحليلها إلى عناصرها الأولية.
 - بناء النموذج الرياضي المناسب والذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
 - اختبار مدى صحة النموذج.
 - إيجاد حل للنموذج بعد معرفة الطريقة التي تخضع لها المشكلة.
 - اختبار مدى مناسبة الحل.
 - تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها.
- وهي خطوات منهجية لا بد من المرور عبرها لحل أي مشكل عملي في الإدارة الاقتصادية للموارد.

الفصل الأول

البرمجة الخطية ، مفهومها و تطبيقاتها.

نتطرق أولا لمفهوم البرنامج الخطي في صورته الرياضية، ثم الى مفهوم البرمجة الخطية، كأسلوب حديث في حل الكثير من المسائل الاقتصادية، و كيفية بناء هذه المسائل إنطلاقا من المعطيات الواقعية للمؤسسة.

أولا : مفهوم البرنامج الخطي: البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين ، هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى ، تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية، في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

و المقصود من كلمة أمثلية هو الوصول الى أعظم قيمة للدالة الاقتصادية أو أدنى قيمة لها حسب الحالة ، في وجود تلك المجموعة من القيود، وألحقت كلمة "خطي" بكلمة البرنامج لأن متغيرات كل من الدالة و القيود هي من الدرجة الأولى ، أما اذا كانت من الدرجة الثانية أو الثالثة أو غير ذلك فإن البرنامج لا يكون خطيا ، وحينئذ نتكلم عن البرمجة غير الخطية وهو غير موضوعنا.

تعريف 1-1 : اذا كانت لدينا مجموعة من المتغيرات والمعاملات في واقع معين فإن البرنامج الخطي لهذا الواقع يعرف رياضيا حسب الحالة كما يلي :

1- حالة التعطيل:

$$\text{Max: } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_n$$

$$\text{s/c} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right.$$

حيث: Max تعني تعظيم، أي 1. Maximisation، ومفادها جعل الدالة Z في أعظم قيمة لها.

والمطلوب البحث عن قيمها، و يشترط أن تكون غير سالبة
كما يدل على ذلك القيد الأخير، و عدم سالبيتها شرط منطقي
يعود أساسا الى أن الكميات لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة.

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$: معاملات الدالة المراد تعظيمها
شريطة إحترام القيود، وتسمى هذه الدالة بالدالة الاقتصادية
أو دالة الهدف، ويمكن أن تأخذ أية قيمة.

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

هي معاملات القيود ويمكن أيضا أن تأخذ أية قيمة.

تكون قيمه موجبة.

s/c أو ت/ق: تعني تحت القيود، و المراد هو تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات.

ويمكن كتابة هذا البرنامج أيضا بالشكل المصفوفي على النحو التالي:

$$\text{Max : } Z = [c_1 \ c_2 \ c_3 \dots c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإختصارا يكتب البرنامج كما يلي:

$$\text{Max : } Z = C'X$$

$$\text{s/c } \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث: C' هو منقول مصفوفة معاملات الدالة الاقتصادية.

X : هو شعاع المتغيرات.

A : هي مصفوفة معاملات القيود.

B : شعاع الثوابت.

مثال 1-1: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Max: } Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 1080 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 960 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة:

الدالة الاقتصادية تكتب كما يلي:

$$\text{Max : } Z = [100 \ 60] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$

و في الأخير قيد عدم السالبة يكتب على النحو:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- حالة التدنئة:

في حالة التدنئة يكتب البرنامج الخطي بصفة عامة كما يلي:

$$\text{Min : } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s/c } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث تعني العبارة Min تدنئة أي Minimisation، و يراد بها تعظيم الدالة Z تحت مجموعة القيود.

وبالشكل المصفوفي يكتب البرنامج على النحو التالي:

$$\text{Min : } Z = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{s/c } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما بالشكل المصفوفي المختصر فيكتب البرنامج كما يلي:

$$\text{Min: } Z = C' \cdot X$$

$$\text{s/c } \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث: C' هو منقول شعاع معاملات دالة الهدف، X هو شعاع المتغيرات، A مصفوفة القيود، B هو شعاع الثوابت.

مثال 1-2: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Min: } Z = 4x_1 + 18x_2 + 2x_3$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 14x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_3 \geq 14 \\ 2x_1 + 34x_2 + 30x_3 \geq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة :

دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$\text{Min: } Z = [4 \ 18 \ 2] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على النحو التالي:

$$\text{s/c } \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يظهر من هذا العرض أن البرنامج الخطي في شكله تعظيم أو تدنئة يتألف من المكونات التالية:

أ- دالة الهدف: تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية وهي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الإنتاج أو تعظيم الأرباح، أو تدنئة التكاليف .. الخ، و تكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

ب- القيود: هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن توجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الاعتبار. يتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

ج- شرط عدم السالبة: و يعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر، لكونها تتعلق بكميات مادية، و الكميات المادية لا يمكن أن تساوي قيم سالبة. و في حالات استثنائية أين لا يشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سرورة الحل.

ثانيا: مفهوم البرمجة الخطية: إن تشكيل البرنامج الذي رأينا في البند السابق إنطلاقا من مسائل واقعية وطرق حل

البرنامج و الوصول الى قيمة المتغيرات التي تعطي الحل الأمثل وإشكاليات ذلك ، هي من الموضوعات التي تدرسها البرمجة الخطية، ويظهر من هذا أن البرمجة الخطية ليست علما مستقلا بذاته ولا هي فنا ، بل هي مجموعة من الطرق الخاضعة لموضوع بحوث العمليات و الذي هو عبارة عن مجموعة من طرق التحليل العلمي يبحث على وجه الخصوص أمثليات الاستخدام للموارد الاقتصادية على مستوى الإقتصاد الجزئي خاصة ، وذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية.

ثالثا: مجالات استخدام البرمجة الخطية : تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف الى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا. ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية و المالية و التجارية و علوم التسيير عامة ما يلي:

1 - في حالة التعظيم:

- تعظيم الأرباح.
 - تعظيم الإنتاج.
 - تعظيم طاقات التخزين.
 - تعظيم استخدام رؤوس الأموال.
 - تعظيم استخدام اليد العاملة.
- و غير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

2 - في حالة التدنئة:

- تدنئة التكاليف.
- تدنئة الخسائر.
- تدنئة عدد الموظفين.
- تدنئة الأجر الإجمالي.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة و غير ذلك من المسائل الهادفة الى عقلنة استخدام الموارد.

رابعا: بناء البرنامج الخطي: تشكيل أو بناء البرنامج الخطي هو أهم خطوة في البحث عن الأمثلية ، و يقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية ، الى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح ، متكون من عدد من المتغيرات ، به دالة هدف كما تمت الإشارة إليها سابقا ، تكون إما في حالة تعظيم أو تدنئة ، و عدد من القيود تكون إما في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا.

ولتشكيل البرنامج الخطي ينبغي أولا تحديد المتغيرات ، ثم تشكيل جدول المسألة بعد ذلك ، بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات و قيود وكذا الكميات المحددة لدالة الهدف، و قبل ذلك ينبغي التأكد من تجانس المعطيات، إذ ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المتشابهة متجانسة ، كما ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المكونة لدالة الهدف أيضا متجانسة ، ويمكن للمثال التالي أن يعطي نظرة واضحة حول كيفية تشكيل البرنامج الخطي لمسألة ما.

مثال 1-3: مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتجات هي:

- خزائن حديدية .
- مكاتب إدارية .
- كراسي .

بحيث أن كل منتج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

- الورشة 1 : تجري بها عملية صناعة الهياكل ، طاقة العمل القصوى بها هي : 32 ساعة عمل يوميا ، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).

- الورشة 2 : تجري بها عملية تركيب الملحقات ، طاقة العمل القصوى بها هي : 24 ساعة عمل يوميا.

- الورشة 3 : تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف) ، طاقة العمل القصوى بها هي : 16 ساعة عمل يوميا .
هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن ، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحد من المنتج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة ، بينما الوحدة الواحدة من المنتج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة ، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في الورشة الأولى و 3 ساعات عمل في الورشة الثانية و 1 ساعة عمل في الورشة الثالثة .

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتج هو :
- المنتج الأول : 200 دج .
- المنتج الثاني : 150 دج .
- المنتج الثالث : 120 دج .

المطلوب : أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة و التي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة .

الإجابة :

أول خطوة في إيجاد الصيغة الرياضية هي تحديد المتغيرات :
بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد الخزائن و عدد المكاتب وعدد الكراسي ، وهي بالتالي متغيرات المسألة ، لذلك نضع :

- عدد الخزائن : x_1

- عدد المكاتب : x_2

- عدد الكراسي : x_3

ثاني خطوة هي تحديد جدول المسألة : وهو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر القيود وعناصر دالة الهدف ، بحيث توضع المتغيرات بشكل عمودي ومعطيات القيود ودالة الهدف بشكل أفقي وذلك كما يظهر في الجدول 1-1 .

جدول المسألة

الطاقة القصوى للورشات س/ع	الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات			منتجات ورشات
	المنتج 3: x_3	المنتج 2: x_2	المنتج 1: x_1	
32	5	4	4	الورشة 1
24	3	4	2	الورشة 2
16	1	2	2	الورشة 3
	120	150	200	ربح الوحدة الواحدة (دج)

جدول 1-1

الجدول أعلاه يلخص لنا بشكل كافٍ معطيات المسألة ، ومنه يظهر على سبيل المثال أن إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى وإنتاج وحدتين يتطلب 4×2 ساعة عمل و إنتاج الكمية x_2 يتطلب $4x_2$ ساعة عمل ، وإذا ما تم إنتاج وحدة واحدة من كل منتج فإن ذلك يتطلب : $4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13$ ساعة عمل في الورشة الأولى ، بينما الطاقة القصوى للورشة الأولى هي 32 ساعة عمل ، وإذا ما أريد إنتاج الكميات : x_1, x_2, x_3 من كل منتج ، فإن وقت العمل المستغرق في الورشة الأولى هو :

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

و يجب أن لا يتجاوز 32 ساعة عمل و هي الطاقة القصوى لهذه الورشة، و بالمثل بالنسبة لبقية المنتوجات و عليه نستنتج منظومة القيود التالية:

1- قيد الورشة الأولى:

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 32$$

2- قيد الورشة الثانية:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24$$

3- قيد الورشة الثالثة:

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 16$$

يعني القيد الأول أن الوقت المستغرق في إنتاج الكميات x_1, x_2, x_3 يجب أن لا يتعدى 32 ساعة عمل في الورشة الأولى و تفسر بقية القيود بشكل مشابه.

و بما أن الكميات يستحيل أن تكون سالبة، لذلك فإن القيد الأخير يكتب كما يلي:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

كما يظهر من الجدول أيضا أن الوحدة الواحدة من المنتج 1 تجلب ربحا مقداره 200 وحدة نقدية، و عند إنتاج وحدتين فإن الربح المحصل عليه من المنتج الأول هو 400 وحدة نقدية، وبالتالي إنتاج الكمية x_1 يجلب للمؤسسة $200 \times x_1$ وبالمثل بالنسبة للمنتوجين الثاني و الثالث، و عليه تصمم دالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Max: } Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

أي أن الهدف هو إيجاد قيم x_i التي تجعل Z في أعظم قيمة لها، دون تجاوز قدرات الورشات.

و عليه يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Max : } Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و نكون بذلك قد إنتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة الى شكلها الرياضي، و هو ما يصطلح عليه بتشكيل البرنامج الخطي أو بناء النموذج الخطي، و هو مؤلف من مجموعين أساسيين؛ الأول هو دالة الهدف المراد تعظيمها، و الثاني هو مجموعة القيود التي يجب إحترامها.

تمارين

تمرين 1: عرف البرنامج الخطي تعريفًا كاملاً.

تمرين 2: ما هي مجالات استخدام البرمجة الخطية.

تمرين 3: صغ مسألة من نسيج خيالك، تستعمل البرمجة الخطية في حلها، مرة في حالة التعظيم وأخرى في حالة التدنئة.

تمرين 4: صغ المسألة المشكلة في التمرين 3 في الشكل الرياضي و أكتبها بالصيغة المصفوفية.

تمرين 5: مؤسسة لصنع الأثاث المتري تنتج نوعين من الأسرة، غير أن طاقة تمويلها بمادة الخشب محدودة، إذ لا تُتاح لها أسبوعياً سوى 12 صفيحة خشبية، كما أن ورشة العمل لا يمكنها أن تتسع لأكثر من 72 ساعة عمل خلال نفس الفترة. إذا علمت أن:

- السرير الواحد من النوع الأول يتطلب صفيحتين من الخشب و 10 ساعات عمل.

- السرير الواحد من النوع الثاني يتطلب صفيحة واحدة من الخشب و 8 ساعات عمل.

و أن ثمن السرير الواحد من النوع الأول هو 1300 دج و ثمن السرير الواحد من النوع الثاني هو 800 دج. و أن تكلفة السرير الواحد من النوع الأول هي 300 دج و تكلفة السرير الواحد من النوع الثاني هي 200 دج .

المطلوب: 1- أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم إيراد المؤسسة.

2- أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة.

3- أكتب البرنامجين بالشكل المصفوفي.

تمرين 6: تنتج إحدى مؤسسات النجارة المنتوجات التالية:

1- الكراسي. 2- الطاولات. 3- الخزائن.

تمر هذه المنتوجات عبر ثلاث ورشات.

- الورشة الأولى طاقة العمل القصوى بها هي 200 ساعة عمل يومياً.

- الورشة الثانية طاقة العمل القصوى بها هي 140 ساعة عمل يومياً.

- الورشة الثالثة طاقة العمل القصوى بها هي 300 ساعة عمل يومياً.

تسعى المؤسسة لتحقيق أعظم ربح ممكن، و بهذا الصدد جمعت المعطيات التالية:

- إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول تتطلب 20 ساعة عمل في الورشة الأولى و 14 ساعة عمل في الورشة الثانية، 10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني تتطلب 18 ساعة عمل في الورشة الأولى و 20 ساعة عمل في الورشة الثانية و 5 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثالث تتطلب 25 ساعة عمل في الورشة الأولى و 20 ساعة عمل في الورشة الثانية و 10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- أن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول هو 400 دج، و ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني هو 200 دج، و ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثالث هو أيضاً 200 دج.

المطلوب: 1- شكل المسألة في نموذج خطي، و أكتبه بالشكل المصفوفي.

قهرين7: مؤسسة منجمية تستغل 3 مناجم بإحدى الولايات،
إذ تقوم بتصفية المعدن وفصله الى نوعين: معدن خام قليل
الجودة، و معدن خام عالي الجودة.
إذا علمت أن الطاقة الإنتاجية لكل نوع حسب كل منجم،
وكذا تكلفة الإنتاج اليومية معروضة حسب الجدول التالي:

الطاقة المنجم	طاقة		التكلفة
	النوع الأول. طن/يوم	النوع 2. طن/يوم	
منجم 1	4	4	20
منجم 2	4	6	22
منجم 3	6	1	18

و أنها إلتزمت مع زبائنها بتسليم 65 طن من النوع الأول و 54
طن من النوع الثاني عند نهاية كل أسبوع على أبعد تقدير.

المطلوب:

- 1- إيجاد البرنامج الخطي الذي من شأنه تحديد عدد الأيام
التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع للوفاء بالتزامات
هذه الشركة بأقل تكلفة ممكنة.
- 2- كتابة البرنامج المحصل عليه بموجب السؤال 1
بالشكل المصفوفي.

الفصل الثاني

حل البرنامج الخطي بيانيا.

نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة
الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت
دالة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة.

ويمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين:

- الطريقة البيانية: وهي شائعة الاستخدام فقط في البرامج
التي تحتوي على متغيرتين على الأكثر.

- طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول: وهي طريقة
عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج.

وسوف نتطرق في هذا الفصل الى الطريقة البيانية، ونخصص
الفصل الموالي لطريقة السمبليكس.

الطريقة البيانية كما سبقت الإشارة تستخدم فقط عندما يحتوي
البرنامج على متغيرتين على الأكثر، وذلك لصعوبة تصور
المسألة على معلم يحتوي على أكثر من بعدين.

ويمكن إستخدام الطريقة البيانية سواء في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة.
أولاً: حالة التعظيم: حل برنامج التعظيم بهذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

- أ- نحول كل مترجمات القيود الى معادلات.
- ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة أ على
معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها بالمستقيمات
المولدة، وهي قد تشكل لنا على المعلم مضلع متعدد الرؤوس.
- ج- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد الى يمين المستقيم
في حالة كون القيد أقل من و الى يساره في حالة القيد أكبر من.
- د- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في
الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس.

هـ- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها إلى الصفر، و نرسم مستقيمتها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم المستقيم Δ .

و- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات المولدة. بموجب الخطوة د، و تكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند سحبه إلى الأعلى بشكل مواز لأصله، و هي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات مولدة.

ل- نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة و ذلك إما هندسيا، بإزالة شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغيرة الأولى، و نعد من هذه النقطة أيضا مستقيما موازيا للمحور الأفقي فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة هي قيمة المتغيرة الثانية، أو جبريا بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرتين.

م- في حالة ما إذا لم تتمكن من تعيين هذه النقطة بدقة لوجود عدد من النقاط المتجاورة أو المتوازية التي يقترّب منها المستقيم Δ ، فإننا نوجد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط و نعوضها في دالة الهدف، و نأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها.

ن- نعوض قيمتي المتغيرتين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة. **ملاحظة:** في حالة عدم التمكن من تحديد آخر نقطة يصل إليها المستقيم، بسبب عدم التمكن من تمييزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، و نأخذ النقطة التي تعطي أعظم قيمة للدالة الاقتصادية.

مثال 1-2: أوجد حل للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max : } Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_2 + 6x_1 \leq 96 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

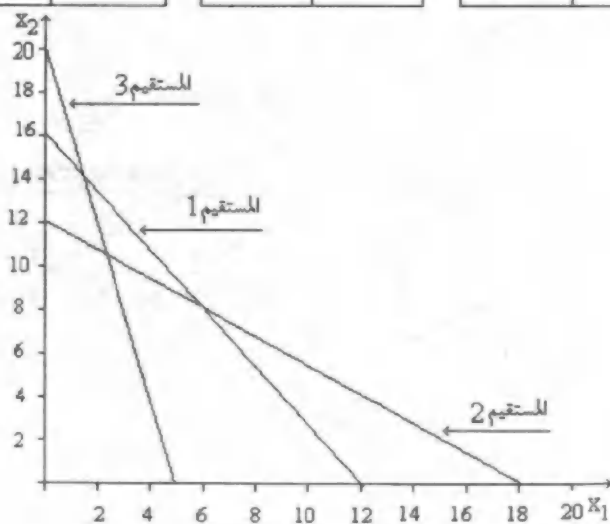
لايجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

أ- نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويل المراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 8x_1 + 6x_2 = 96 & 6x_1 + 9x_2 = 108 & 8x_1 + 2x_2 = 40 \\ \hline \end{array}$$

ب- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، و يكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما لنحصل على الشكل 1-2 أدناه.

المستقيم 1.		المستقيم 2.		المستقيم 3.	
$8x_1 + 2x_2 = 40$		$6x_1 + 9x_2 = 108$		$8x_1 + 6x_2 = 96$	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	20	0	12	0	16
5	0	18	0	12	0



شكل 1-2

ج- على نفس المعلم نرسم المستقيم وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي : $Z=0$ أي :

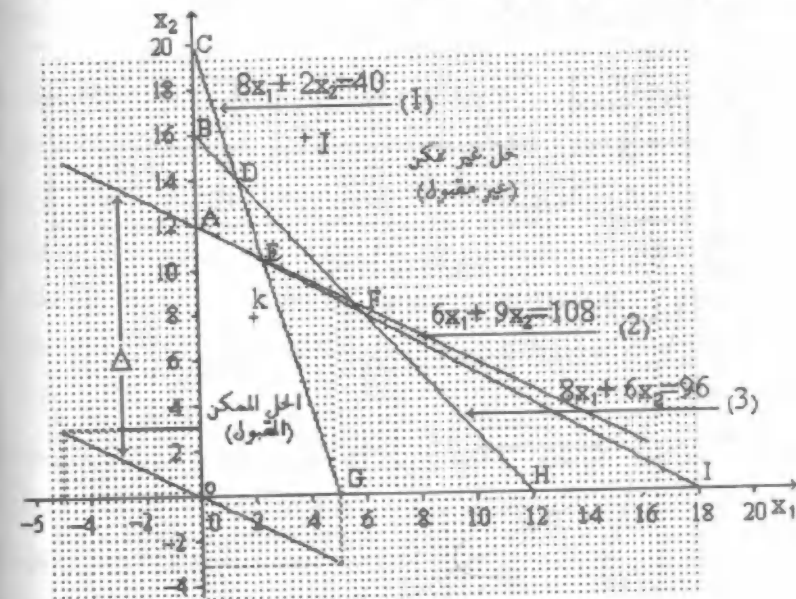
$$Z=100x_1 + 60x_2 = 0$$

المستقيم Δ يمر من النقطتين:

$100x_1 + 60x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-5
-3	5

و يكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر إلزاماً بنقطة المبدأ.

بعد رسم المستقيمات المولدة نشطب المناطق التي لا تحقق جميع القيود كما يظهر في الشكل 2-2.



شكل 2-2

من خلال الشكل نلاحظ أن أية نقطة توجد إلى يمين المستقيم (1) لا تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة J على سبيل المثال حيث:

$$x_1 = 4 \text{ و } x_2 = 16 \text{ لوجدنا أن:}$$

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 4 + 2 \times 16 = 64 > 40$$

فالقيد إذن غير محقق على اليمين، لكن أية نقطة على يسار المستقيم (1) فهي تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة k على سبيل المثال حيث: $x_1 = 2$ و $x_2 = 8$ لوجدنا أن:

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 2 + 2 \times 8 = 32 < 40$$

فالقيد إذن محقق، وظهر هناك فرق في الطاقة بقيمة 8 وحدات. ومن جهة أخرى فإن أية نقطة على طول المستقيم (1) تحقق القيد بالتمام أي تحقق المساواة، وهي بذلك تستنفذ كل الطاقة المتاحة.

بتطبيق نفس المبدأ نجد أن كل المناطق الموجودة على يمين المستقيمات (1)، (2) و (3) لا تحقق القيود، بينما كل المناطق التي هي على يسار كل مستقيم فهي تحقق القيد، وبمعنى آخر فإن أية نقطة على المستقيم (1) أو على يساره تحقق متراجحة القيد و أي نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، و أية نقطة على المستقيم (2) أو على يساره تحقق متراجحة القيد و أية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وبالمثل فإن أية نقطة على المستقيم (3) أو على يساره تحقق متراجحة القيد و أية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة.

كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي إلى يسار المحور العمودي مرفوضة و بالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنياً و تشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة OAE (المنطقة غير المشطبة) وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم Δ الى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقطة E و بالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و (2)، إذ نجد قيمة المتغيرين وذلك إما هندسياً بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي إنطلاقاً من النقطة E فنجد قيمة x_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتين المستقيمين حلاً مشتركاً كما يلي:

$$\text{مستقيم (1)} \quad 8x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\text{مستقيم (2)} \quad 6x_1 + 9x_2 = 108$$

بضرب معادلة المستقيم (1) في 3 و معادلة المستقيم (2) في -4 نجد:

$$24x_1 + 6x_2 = 120$$

$$-24x_1 - 36x_2 = -432$$

$$\text{بجمع المعادلتين نجد:} \quad -30x_2 = -312$$

$$\text{و منه يكون:} \quad x_2 = \frac{-312}{-30} = 10.4$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_1 = 2.4$

و بالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما:

$$x_1 = 2.4 \quad x_2 = 10.4$$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

$$\text{القيود الأول:} \quad 8 \times 2.4 + 2 \times 10.4 = 40$$

$$\text{القيود الثاني:} \quad 6 \times 2.4 + 9 \times 10.4 = 108$$

$$\text{القيود الثالث:} \quad 8 \times 2.4 + 6 \times 10.4 = 81.6 < 96$$

طاقة غير مستعملة قيمتها 14.4 ساعة عمل.

و لمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 2.4 + 60 \times 10.4 = 864$$

و هي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، و لا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة للدالة الاقتصادية و تحقق في نفس الوقت جميع القيود.

نظرية: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن. **مثال:** حالة التحدية: لإيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية في حالة التدنئة، تتبع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراحات القيود الى معادلات.

ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة أعلى معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها بالمستقيمات المولدة.

ج- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود و هي توجد الى يسار المستقيمات في حالة كون القيد أكبر من و الى يمينه في حالة القيد أقل من.

د- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود و هي في الغالب توجد الى يمين المستقيمات المولدة، و تسمى بمنطقة الحلول الممكنة أو حيز الإمكان.

هـ- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها الى الصفر، و نرسم مستقيماً على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسميه المستقيم Δ .

و- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إتجاه رؤوس المنطقة التي تحقق القيود المحصل عليها من المستقيمات المولدة في الخطوة د، و تكون النقطة التي تحقق أقل قيمة للدالة الاقتصادية-دالة الهدف- هي أول نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند تحريكه الى الأعلى بصفة موازية لأصله، و هي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات.

ل- توجد إحداثيات هذه النقطة إما بالحل المشترك أو بالإسقاط الهندسي، فنحصل بذلك على قيمة المتغيرين اللتين تدنيان الدالة الاقتصادية.
م- نعوض قيم المتغيرات المحصل عليها في دالة الهدف فنحصل على القيمة الدنيا لها.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد أول نقطة يصل إليها المستقيم، بسبب عدم التمكن من تمييزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أقل قيمة للدالة الاقتصادية.

مثال 2-2: أوجد حل أمثل للبرنامج التالي بإستعمال الطريقة البيانية:

$$\text{Min: } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

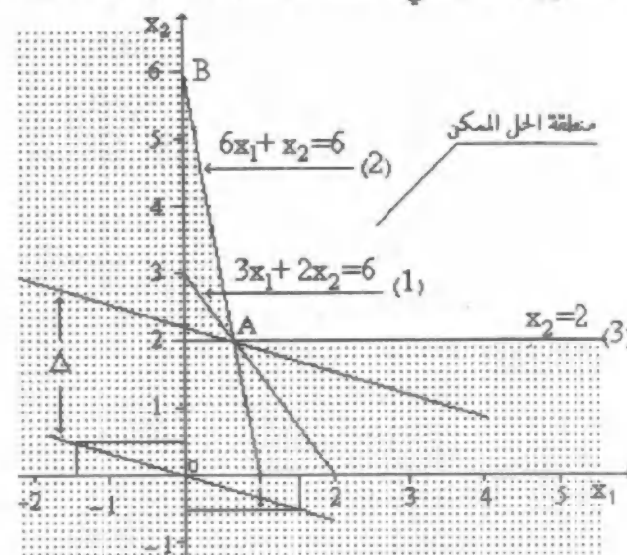
الحل:

أ- المستقيمات المولدة المحصل عليها هي:

$x_2=2$	$6x_1+x_2=6$	$3x_1+2x_2=6$
المستقيم 1	المستقيم 2	المستقيم 3
$Z=10x_1+30x_2=0$	$6x_1+x_2=6$	$3x_1+2x_2=6$
x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2
3	0	0
3-	1	2
1	0	0

نقوم برسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ونحدد منطقة الحل المقبول، وهي المنطقة غير المشطبة في الشكل 2-3 فتكون أية نقطة على الخط 2 أو الى يمينه غير المشطب تحقق جميع القيود، و أية نقطة على الخط 3 أو الى أعلاه غير المشطب تحقق جميع القيود، غير أنه بالنسبة للخط 2 فإنه لا توجد سوى نقطة واحدة فقط هي التي تحقق جميع القيود (شكل 2-3)، و عليه يكون الحل في

أحد الرأسين إما A أو B، غير أنه عند تحريك تحريك المستقيم Δ الى أعلى نجد أن أول رأس يصل إليه في منطقة الحل المقبول هو A و بالتالي فقيم المتغيرتين اللتين تحققان أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي نقطة التقاطع بين المستقيمتين الثلاثة، و لإيجادها يكفي أن ننزل من هذه النقطة شاقولا على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 المقابلة



شكل 2-3.

و نمد خط موازي للمحور x_1 فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة تحدد قيمة x_2 ، أو أن نحل معادلات هذه المستقيمات حلا مشتركا، و عليه نجد القيمتين التاليتين:

$$x_2 = 2 \quad x_1 = 2/3 = 0.66$$

وهما قيمتان تجعلان الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها و في نفس الوقت تجعلان كل القيود محققة، حيث نجد القيمة العظمى للدالة الاقتصادية و هي:

$$Z = 10x_1 + 30x_2 = 10(0.66) + 30(2) = 66.66$$

ثالثاً، حالات خاصة في الحل البياني: يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء إيجاد الحل بالطريقة البيانية منها ما يلي:

1- **تعدد الحلول:** يمكن أحياناً أن نصادف أكثر من حل واحد، وهي الحالة المسماة بتعدد الحلول، وفيها نجد على الأقل أن رأسين من رؤوس مضلع حيز الإمكان يتماسان في آن واحد مع المستقيم Δ بحيث يكونا آخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التذلل، كما يوضح ذلك المثال التالي:

مثال 2-3: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max: } Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

معادلات المستقيمات المولدة هي:

$$4x_1 + 8x_2 = 40$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 4$$

المستقيم الأول يرسم من خلال النقطتين التاليتين:

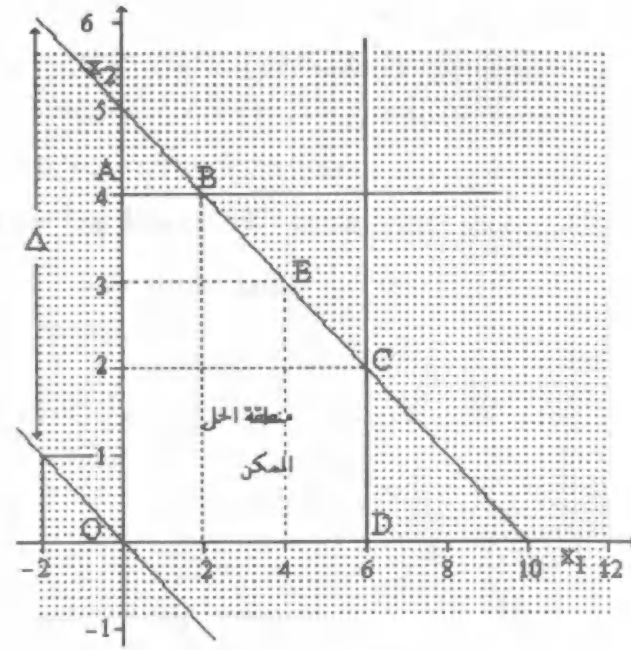
$$\text{الأولى: } x_1 = 0, x_2 = 5$$

$$\text{الثانية: } x_1 = 10, x_2 = 0$$

يلاحظ من خلال الشكل 2-4 أنه عند تحريك المستقيم Δ إلى اليمين فإنه يلتقي مع رأسي منطقة الحل الممكن B و C في نفس الوقت، وبالتالي فإن كلا النقطتين تعطيان حلاً أمثلاً للدالة الاقتصادية.

ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في هذه الدالة.

$$\text{النقطة B تعطي: } x_1 = 2, x_2 = 4$$



شكل 2-4.

و قيمة دالة الهدف عندها هي: $Z = 2x_1 + 4x_2 = 2 \times 2 + 4 \times 4 = 20$

النقطة C تعطي: $x_2 = 2, x_1 = 6$

و قيمة دالة الهدف عندها هي: $Z = 2x_1 + 4x_2 = 2 \times 6 + 4 \times 2 = 20$

و يلاحظ أن النقطتين أعطيتا نفس القيمة للدالة الاقتصادية.

و الواقع أنه ليست هتين النقطتين فقط تعطيان أكبر قيمة للدالة

الاقتصادية، لكن أية نقطة أخرى موجودة على طول المستقيم

BC. فلرأخذنا النقطة E على سبيل المثال حيث:

$$x_2 = 3, x_1 = 4 \quad \text{فإن قيمة دالة الهدف هي:}$$

$$Z = 2x_1 + 4x_2 = 20$$

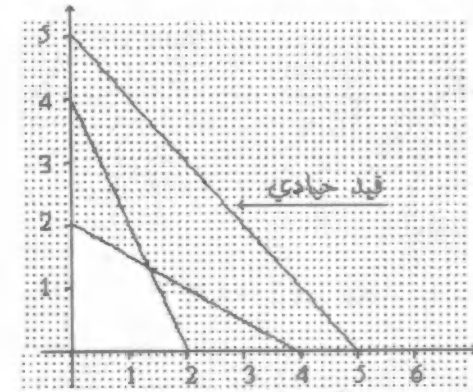
وهي نفس القيمة المحصل عليها عند رأسي منطقة الحل الممكن.

تفيد هذه الحالة المُمسِر في أنها توفر له المرونة في إتخاذ القرار

لكونها تتيح له بدائل عديدة.

تصادف هذه الحالة خاصة عندما يكون المستقيم Δ موازيا لأحد المستقيمتين المولدة في سقف منطقة الحل الممكن في إتجاه اليمين في حالة التعظيم أو في أرضية منطقة الحل الممكن في إتجاه اليسار في حالة التذئنة، حينئذ يكون ميل هذا المستقيم و ميل المستقيم Δ متساويان.

2- حالة حياد أحد القيود: عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمتين هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة، و حينها يكون هذا القيد حيايدا تماما، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام، و تظهر هذه الحالة كما في الشكل 2-5.



شكل 2-5.

3- حالة إستحالة الحل: هي الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أية منطقة للحل الأمثل، كما في المثال التالي:

مثال 2-4:

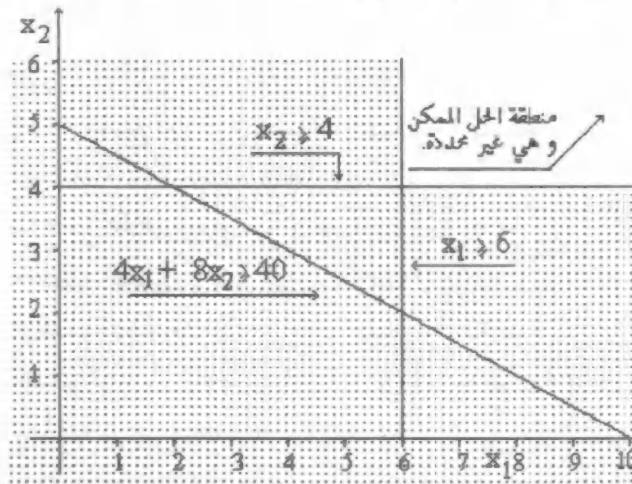
$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 20x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4- لا نهائية الدالة الإقتصادية: في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أو تساوي مقدار ثابت، غير أنه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود، فتكون هذه الأخيرة كلها أكبر أو تساوي في حالة التعظيم، و هذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لانهاية، و لا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي و محدد للدالة.

مثال 2-5: حدد منطقة الحل الممكن للبرنامج التالي. ماذا تستنتج.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بإستعمال الطريقة البيانية، نلاحظ من خلال الشكل 2-6 أنه توجد منطقة لانهاية تحقق دالة الهدف، فأية قيمة في إتجاه السهم تحقق دالة الهدف، وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهاية.



شكل 2-6.

تمارين

تمرين 1: مؤسسة صناعية تنتج أجهزة الطبخ الكهربائية وأجهزة الطبخ الغازية، بغية معرفة الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أعظم ربح ممكن قامت بجمع البيانات التالية:

1- المنتجان يمران عبر ورشتين أساسيتين، هما ورشة التركيب يعمل بها 5 عمال، و ورشة الإعداد النهائي و يعمل بها 4 عمال، طاقة العمل اليومي القصوى لكل عامل هي 8 ساعات.

2- أن المنتج الأول يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية، بينما المنتج الثاني يتطلب 2 ساعة عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية.

3- سعر المنتج الواحد من النوع الأول هو 500 دج و يكلف 200 دج وسعر المنتج الواحد من النوع الثاني هو 300 دج و يكلف 100 دج.

المطلوب: 1- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة. 2- باستعمال الطريقة البيانية، أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتعظيم ربح المؤسسة.

تمرين 2: مصنع للإلكترونيات الصغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسبة هما: 1- الحاسب التجاري. 2- الحاسب العلمي.

كل نوع من الحاسبين يمر عبر 3 أقسام هي:

- قسم التسليك: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 55 ساعة عمل يوميا.

- قسم التجميع: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 72 ساعة عمل يوميا.

- قسم الاختبار: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 20 ساعات عمل يوميا.

الحاسب التجاري الواحد يتطلب 2 ساعة عمل في قسم التسليك و 12 ساعات عمل في قسم التجميع و 2 ساعة عمل في قسم الاختبار.

الحاسب العلمي الواحد يتطلب 4 ساعات عمل في قسم التسليك، 6 ساعات عمل في قسم التجميع، و 4 ساعة عمل في قسم الاختبار.

إذا كان ربح الحاسب التجاري الواحد هو 25 دينار و ربح الحاسب العلمي الواحد هو 30 دينار. **المطلوب:**

1- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع. 2- أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين و التي تجعل الربح في أعظم قيمة باستخدام الطريقة البيانية.

3- حدد الطاقات غير المستغلة في كل قسم إن وجدت.

تمرين 3: أوجد حل للتمرين رقم 5 من سلسلة تمارين الفصل السابق باستعمال الطريقة البيانية.

تمرين 4: باستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التعظيم التالية:

$$\text{Max: } Z = 10x_1 + 20x_2 \quad \text{Max: } Z = x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max: } Z = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{Max: } Z = 150x_1 + 200x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3.5x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad s/c \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \leq 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \leq 550 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 5: باستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التدنئة التالية إن أمكن:

Min : $Z = 20x_1 + 30x_2$	Min: $Z = 25x_1 + 30x_2$	Min: $Z = 80x_1 + 100x_2$
$s/c \begin{cases} 2x_1 + 14x_2 \geq 4 \\ 16x_1 + 10x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 9x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$s/c \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \geq 1 \\ 8x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ 6x_1 + 9x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$s/c \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 10x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

الفصل الثالث

حل البرنامج الخطي العام. طريقة السمبلكس.

طريقة السمبلكس أو طريقة الجداول كما تسمى أحيانا تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي اثنين أو أكثر من ذلك، وهي تعتمد على خوارزمية تسمى بخوارزمية السمبلكس. قبل الخوض في إيجاد الحل بهذه الطريقة ينبغي التعرف على بعض أنواع الصيغ الخطية وبعض المصطلحات، ومن ذلك مايلي:

أولاً: **الصيغة القانونية للبرنامج الخطي:** هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية القانونية وهي حسب الحالة كما يلي:

1- **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- أ- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم.
 - ب- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.
 - ج- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.
- أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$\text{Max : } Z = C'X$$

$$\text{s/c} \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت.

مثال 3-1: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= 2x_1 + 9x_2 + x_3 \\ s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2- حالة التحذئة: حتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة

القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- أ- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة.
 - ب- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.
 - ج- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.
- أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$\text{Min: } Z = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

مثال 3-2: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية:

$$\begin{aligned} \text{Min: } Z &= 2x_1 + 9x_2 + x_3 \\ s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ثانيا: الصيغة المختلطة: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة، و القيود مختلطة بحيث تحتوي على متراجحات "أكبر من" و "أصغر من" و معادلات، كل هذه الحالات معا أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

مثال 3-3: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته المختلطة:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= 2x_1 + 9x_2 + x_3 \\ s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ثالثا: الصيغة النموذجية: و فيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة.

تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، باعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

رابعا: إيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول:

لإيجاد الصيغة النموذجية في حالة كون القيد عبارة عن متراجحة لابد من إدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج، بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود إلى معادلات، تسمى هذه المتغيرات بمتغيرات الفجوة لأنها تسد

الفرق "الفجوة" الموجودة بين طرفي المتراجحة، ويتم ذلك حسب الحالات كما يلي:

1- الحالة الأولى: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

لتحويل القيد الى معادلة "متساوية" ينبغي أن نضيف الى الطرف الأيسر متغيرة صورية تسمى متغيرة الفجوة ، نرمز لها بالرمز x_n^e حيث ترتب المتغيرة و e ترمز الى الفجوة (écart) ، و عليه فإن القيد أعلاه ليصبح عبارة عن معادلة فإننا نكتبه كما يلي:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+1}^e = b_m$$

حيث x_{n+1}^e أضيفت الى الطرف الأيسر لترجحه فيصبح الطرف الأيسر مساويا للطرف الأيمن، و بمعنى آخر أضيفت لتغلق الفجوة بين الطرفين، لذلك سميت بمتغيرة الفجوة. و تمثل متغيرات الفجوة الطاقات غير المستعملة أو الطاقات العاطلة، و هي متغيرات يجب أن تكون أيضا غير سالبة. تنبغي الإشارة الى أنه عند إدخال متغيرة الفجوة الى القيد فإنه ينبغي إدخالها أيضا على دالة الهدف لكن بمعامل يساوي الصفر على اعتبار أنها خارج النظام. وتسمى مصفوفة معاملات القيود المحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة بمصفوفة **الحل الأساسي الأول**.

مثال 3-4: أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج التالي:

$$\text{Max: } Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن كل القيود عبارة عن متراجحات و بالتالي فينبغي إضافة الى كل منها متغيرة للفجوة على النحو التالي:

$$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10 \quad \text{القيد الأول يكتب كما يلي:}$$

$$x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7 \quad \text{القيد الثاني يكتب كما يلي:}$$

$$x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25 \quad \text{القيد الثالث يكتب كما يلي:}$$

لاحظ أننا ميزنا بين متغيرات الفجوة المضافة فأعطيناها ترتيبا متزايدا و مفاييرا للمتغيرات الحقيقية ، وهي غير متساوية في الغالب لعدم تساوي الطاقات غير المستعملة في كل قيد. و عليه يصبح البرنامج بالصيغة القانونية على النحو التالي:

$$\text{Max: } Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10 \\ x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^e \geq 0 \end{cases}$$

و يجب أن تضاف متغيرات الفجوة بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، كما يظهر في المصفوفة أدناه:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^e & x_5^e & x_6^e \\ \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 17 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأول، وهي تتضمن مصفوفة أحادية كما تظهره الأعمدة 4، 5، و 6، ولا يشترط أن تكون هذه الأعمدة متحاذية، وهي ضرورية، إذ تعتبر الصيغة القانونية ومن ثم المصفوفة الأحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود أولى خطوات البحث عن الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

2- الحالة الثانية: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

وهي الحالة الغالبة في حالة التدنئة.

لتحويل القيد الى الشكل النموذجي أي تحويله الى معادلة "متساوية"، ينبغي أن نطرح من الطرف الأيسر متغيرة صورية هي متغيرة الفجوة كما جرت العملية في الحالة الأولى، و عليه يصبح القيد المشار إليه أعلاه كما يلي:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+1}^e = b_m$$

يلاحظ أن معامل متغيرة الفجوة يأخذ إشارة سالبة و بالتالي فهو لا يتيح لنا إمكانية الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، لذلك يتم الاستعانة بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الاصطناعية و يفترض أن تكون قيمتها معدومة و معاملها يساوي 1+ و بالتالي فهي مجرد متغيرات مساعدة، و نميزها عن متغيرات الفجوة بالحرف a فنكتبها على الشكل x_j^a ، حيث الحرف a يرمز الى أنها اصطناعية أي أول حرف من مصطلح artificielle. كما ينبغي إجراء تغييرات على دالة الهدف، فتضاف متغيرات الفجوة إليها بمعاملات صفرية، أما المتغيرات الاصطناعية فتضاف إليها على أن تأخذ معاملات يفترض أن تكون كبيرة جدا بإشارة سالبة نرمز لها بـ M إذا كانت دالة الهدف في حالة تعظيم، وبإشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف في حالة تدنئة. و نجري مجموعة من التحويلات الأخرى عليها كما يوضحه المثال التالي:

مثال 3-5: أوجد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج التالي:

$$\begin{array}{l} \text{Max: } Z = 20x_1 + 15x_2 \\ \text{s/c} \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

لايجاد الصيغة القانونية و مصفوفة الحل الأساسي الأول نجري التحويلات التالية على النظام:

القيد الأول يكتب كما يلي: $7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14$

القيد الثاني يكتب كما يلي: $8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16$

القيد الثالث يكتب كما يلي: $2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10$

أما دالة الهدف فتكتب كما يلي:

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a$$

$$\boxed{\text{Max: } Z = 20x_1 + 15x_2 - Mx_4^a - Mx_7^a}$$

أو:
يتم تعويض قيم x_4^a و x_7^a في دالة الهدف بقيمهما المستخرجة من القيدين الأول والثالث على النحو التالي:

$$\text{من القيد الأول نجد: } x_4^a = 14 - 7x_1 - 2x_2 + x_3^e$$

$$\text{من القيد الثالث نجد: } x_7^a = 10 - 2x_1 - 5x_2 + x_6^e$$

بالتعويض في دالة الهدف وفك الأقواس وضم الحدود المتشابهة
نصل الى النظام التالي:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Max: } Z &= (20 + 9M)x_1 + (15 + 7M)x_2 - Mx_3^e - Mx_6^e - 24M \\ s/c \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a & = 14 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_5^e & = 16 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a & = 10 \end{cases} \end{aligned}}$$

و تكون مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج كما يلي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3^e & x_4^a & x_5^e & x_6^e & x_7^a \\ \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

يلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوي على عدد من الأعمدة تشكل عند محاذاتها مصفوفة أحادية ، (الأعمدة 4، 5 و 7) و هو مبرر التحويلات التي تم إجرائها على النظام.

خامساً: إيجاد الحل في حالة التعظيم : لإيجاد الحل بطريقة الجداول " السمبليكس " في حالة التعظيم يتم اتباع الخوارزمية التالية:

1- نبحث عن الصيغة النموذجية، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.

2- نرتب البيانات في جدول هو الجدول 1 و يسمى بجدول الحل الأساسي الأول. فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس " رئيسية " أو متغيرات داخل الأساس (قيمها عند بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابت) ، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة). وتكون قيمة دالة الهدف أيضاً معدومة.

فإذا كان البرنامج الخطي على النحو:

$$\text{Max: } Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي:

$$\text{Max : } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3^e = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4^e = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5^e = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0 \end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	
متغيرات	x_3^e	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
	x_4^e	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
	x_5^e	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3
الأساس							
	ΔZ	c_1	c_2	0	0	0	0

جدول 1-3

لاحظ أن متغيرات الأساس الموضوع في العمود الأول من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة 1 من أعمدة المصفوفة الأحادية، و تكون في جدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات إصطناعية أو هما معا، و في المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، و تحل محلها متغيرات أخرى.

و في هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير (عمود الثوابت)، أي: $x_3^e = b_1$, $x_4^e = b_2$, $x_5^e = b_3$ ، أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي معدومة أي: $Z=0$ و هي تظهر في آخر خانة من الجدول، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

3- إنطلاقاً من الجدول 1 نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني "الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك عنصر الارتكاز، المعرف لاحقاً.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أكبر معامل في الدالة الاقتصادية، أي أكبر قيمة في السطر الأخير (ΔZ)، (وهي المتغيرة التي تعطى أكبر عائد للدالة الاقتصادية)، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس بعمود عنصر الارتكاز أو العمود الأمثل.

- المتغيرة التي تخرج من الأساس، هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الارتكاز. يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر عنصر الارتكاز.

- عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

4- جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:
- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس و ذلك في العمود الأول من الجدول أي عمود متغيرات الأساس.

- يجري تحويل عمود عنصر الارتكاز الى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز الى القيمة 1 و عناصر العمود الأخرى الى قيم معدومة.

- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما باستخدام طريقة التركيبات الخطية أو باستخدام قاعدة المستطيلات و هي على النحو التالي:

إذا كانت عناصر جدول الحل الأساسي كما يلي:

جدول 1				
	a		b	
	c		d	

فإنه يتم إجراء التحويلات للانتقال الى جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

يتم تقسيم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز، بحيث يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a و تتحول بقية عناصر عمود عنصر الارتكاز الى أصفار فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر. أما القيمة التي تحمل مكان d فتحسب كما يلي:

$$d - \frac{b \times c}{a}$$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى ، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحاً منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الارتكاز و عمود عنصر الارتكاز مقسوماً على قيمة عنصر الارتكاز. و تصبح عناصر الجدول الموالي كما يلي:

جدول 2				
	1		b/a	
	0		$d - \frac{b \times c}{a}$	

و بالمثل إذا كانت معطيات الجدول كما يلي:

جدول 1				
	d		c	
	b		a	

فإن الجدول الموالي يصبح كما يلي:

جدول 2				
	$d - \frac{b \times c}{a}$		0	
	b/a		1	

5- نستمّر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية الى الخطوة 3 ، وهذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الاقتصادية (السطر الأخير) سالبة أو معدومة ، و حينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل وفيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي الى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل وبقية المتغيرات تكون معدومة، أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال 3-6: أوجد حل للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max : } Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

-نوجد أولا الصيغة النموذجية، وهي كما يلي:

$$\text{Max : } Z = 100x_1 + 60x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3^e = 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_4^e = 108 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_5^e = 96 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0 \end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	النسبة
x_3^e	8	2	1	0	0	40	5
x_4^e	6	9	0	1	0	108	18
x_5^e	8	6	0	0	1	96	12
ΔZ	100	60	0	0	0	0	

جدول 2-3.

2- المتغيرة التي تدخل الأساس: هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر الدالة الاقتصادية وبالتالي فهي المقابلة للقيمة 100 أي x_1 . وبالتالي فعمود عنصر الارتكاز هو العمود الأول.

3- المتغيرة التي تخرج من الأساس: هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين النسب الحاصلة من جراء تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز، وهي 5 و عليه فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_3^e .

و يكون عنصر الارتكاز هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز، أي هو القيمة 8 المؤطرة في الجدول أعلاه.

نجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي التالي:

-نقسم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز فيصبح هذا السطر على وجه الترتيب كما يلي:

$$1 \quad 1/4 \quad 1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 5$$

-يتحول عمود عنصر الارتكاز الى عمود أحادي، أي أن قيمة عنصر الارتكاز تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه، أما بقية عناصر العمود فتتحول الى أصفار.

-بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس تبقى أحادية.

-بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات، و على سبيل المثال، القيم 9 في الجدول 2-3 تحول على النحو التالي:

$$9 - \frac{2 \times 6}{8} = \frac{15}{2}$$

و القيمة 96 في عمود الثوابت من الجدول 2-3 تصبح على النحو:

$$96 - \frac{40 \times 8}{8} = 56$$

و القيمة 0 التي تعبر عن قيمة الدالة الاقتصادية بالقيمة المطلقة الموجودة في آخر خانة من الجدول تصبح كما يلي:

$$0 - \frac{40 \times 100}{8} = -500$$

و بالمثل يتم حساب بقية العناصر، والنتائج معروضة في الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	النبة
x_1	1	1/4	1/8	0	0	5	20
x_4^e	0	15/2	-3/4	1	0	78	10.4
x_5^e	0	4	-1	0	1	56	14
ΔZ	0	35	-25/2	0	0	-500	

جدول 3-3.

يلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية تحسنت فانتقلت قيمتها من 0 الى 500، كما دخلت متغيرة حقيقية الى الأساس و أصبحت قيم المتغيرات كما يلي:

$$x_1 = 5$$

$$x_4^e = 78$$

$$x_5^e = 56$$

أما بقية المتغيرات غير الموجودة في عمود متغيرات الأساس فهي تساوي الى الصفر، أي:

$$x_2 = 0$$

$$x_3^e = 0$$

أما قيمة دالة الهدف فتساوي $|-500|$ أي 500. ويمكن التأكد من صحة نتيجة دالة الهدف بالتعويض في الدالة فنجدها كما يلي:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 5 + 60 \times 0 = 500$$

و هي نفس القيمة التي تظهر في آخر خانة من عمود الثوابت، و الفرق فقط هو أنها تأخذ الإشارة السالبة في الجدول.

السؤال المطروح الآن، هو هل أننا توصلنا الى الحل الأمثل؟ والجواب هو أنه ما دامت هناك قيم أكبر من الصفر في السطر الأخير من الجدول - سطر معاملات الدالة - فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد و ينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه. ونعود من جديد فنختار عمود المتغيرة التي تدخل الأساس و هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر معاملات الدالة - السطر الأخير - من الجدول. و عليه فإن المتغيرة x_2 هي التي تدخل الأساس باعتبارها تقابل أكبر قيمة و هي 35، و يتحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز. بتقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز يتحدد لنا سطر عنصر الارتكاز و هو السطر الثاني، وتعين بذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس وهي x_4^e . ويكون عنصر الارتكاز هو 15/2، و نحري تحويلات مشابهة لتحويلات المرحلة السابقة و هي:

- نقسم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز.

- نحول عمود عنصر الارتكاز الى عمود أحادي.

- نبقى بقية أعمد المتغيرات الداخلة في الأساس أحادية.

- نحري تحويلات بقية العناصر بطريقة المستطيلات.

و نحصل بذلك على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B
x_1	1	0	3/20	-1/30	0	12/5
x_2	0	1	-1/10	2/15	0	52/5
x_3^e	0	0	-3/15	-8/15	1	72/5
ΔZ	0	0	-9	-14/3	0	-864

جدول 3-4.

كل معاملات الدالة الاقتصادية أي السطر الأخير أصبحت سالبة، و بالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل. و تكون النتائج المحصل عليها هي:

$$\begin{aligned} x_1 &= 12/5 = 2.4 \\ x_2 &= 52/5 = 10.4 \\ x_3^e &= 72/5 = 14.4 \end{aligned}$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

و نلاحظ أن الدالة الاقتصادية تحسنت وانتقلت قيمتها من 500 الى 864. و يمكن إثبات ذلك بالتعويض في الدالة كما وردت حيث نجد:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \frac{12}{5} + 60 \frac{52}{5} = 864$$

و بالتالي فإن قيم المتغيرات التي تجعل الدالة في أعظم قيمة لها هي:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.4 \\ x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

كما أن هذه النتائج تحقق القيد الأول و الثاني تماما، أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة عاطلة قيمتها 14.4 و تعبرها عنها متغيرة الفجوة $x_3^e = 14.4$ ، كما يمكن إثبات ذلك من خلال التعويض في القيود:

$$8x_1 + 2x_2 \leq 40 \Rightarrow 8 \times 2.4 + 2 \times 10.4 = 40$$

القيد الأول: أي أن القيد محقق تماما.

$$6x_1 + 9x_2 \leq 108 \Rightarrow 6 \times 2.4 + 9 \times 10.4 = 108$$

القيد الثاني: أي أن القيد محقق تماما.

$$8x_1 + 6x_2 \leq 96 \Rightarrow 8 \times 2.4 + 6 \times 10.4 = 81.6$$

القيد الثالث: أي أن القيد غير محقق تماما، و تبقى طاقة غير مستغلة قيمتها 14.4 و هي قيمة متغيرة الفجوة المضافة أي $x_3^e = 14.4$ ، كما تظهر في الجدول 3-4.

للتذكير فإن القيمة العظمى للدالة الاقتصادية هي: $Z=864$ وهي نفس القيمة التي وجدناها باستخدام الطريقة البيانية (انظر حل المثال 1-2 في الفصل السابق).

مادام: إيجاد الحل في حالة التدنئة: لإيجاد الحل بطريقة الجداول "السبيليكس" في حالة التدنئة يتم إتباع الخوارزمية التالية:

1- نبحث عن الصيغة النموذجية، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية، و حيث أن القيود تكون في الغالب في حالة أكبر أو تساوي، لذلك نستعمل متغيرات الفجوة في إيجاد المساواة و المتغيرات الإصطناعية في إيجاد المصفوفة الأحادية.

2- نرتب البيانات في جدول هو الجدول 1 و يسمى بجدول الحل الأساسي الأول، فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس "رئيسية" في حالة ما إذا كانت معاملاتها + أو تكون المتغيرات الإصطناعية هي متغيرات أساس و هي الحالة الأكثر مصادفة، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها في هذا الجدول

متغيرات خارج الأساس. وتكون أيضا قيمة دالة الهدف معدومة، وينبغي إدخال تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية منها وذلك حسب التوضيح التالي:
إذا كان البرنامج الخطي على النحو:

$$\text{Min: } Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0,$$

$$x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0$$

و نحري التحويلات التالية على دالة الهدف:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

حيث M هو معامل المتغيرات الاصطناعية و يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة موجبة، وهذا حتى تكون المتغيرات المصاحبة له من أولى المتغيرات التي تخرج من الأساس، لأن مقتضى تصغير الدالة يتطلب إخراج المتغيرات ذات المعاملات الأكبر، وهو ما تعمل على أساسه خوارزمية الحل.
من القيود المعدلة لدينا نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية بدلالة بقية المتغيرات وهي:

$$x_4^a = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_5^e$$

$$x_8^a = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_7^e$$

بتعويض قيم هذه المتغيرات في الدالة الاقتصادية المحولة وهي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

و جمع الحدود المتشابهة نحصل على الشكل الجديد للدالة الاقتصادية وهي:

$$Z = [c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + M(b_1 + b_2 + b_3)$$

بمساواة الدالة الى الصفر وهي نقطة الإنطلاق دائما، نجد:

$$[c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -M(b_1 + b_2 + b_3)$$

و يكون الجدول الأساسي الأول كما يلي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
x_6^a	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
x_8^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3
ΔZ	$c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M$	$c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-M(b_1 + b_2 + b_3)$

جدول 3-5.

في هذا الجدول أيضا تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة في العمود الأخير الى اليمين، و نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية تكون إجباريا داخل الأساس لأن كل

متغيرات الأساس يجب أن تشمل عمود يشكل أحد أعمدة المصفوفة الأحادية الواجب توفرها في مصفوفة جدول الحساب الأساسي الأول، ولاشك أن السبب الرئيسي لإضافة المتغيرات الإصطناعية هو توفير هذا الشرط.

3- إنطلاقاً من الجدول 1 نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الموالي وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك عنصر الارتكاز.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أصغر معامل سالب في الدالة الاقتصادية أي أصغر قيمة سالبة في السطر الأخير من الجدول، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس بعمود عنصر الارتكاز.

- المتغيرة التي تخرج من الأساس، هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الارتكاز. يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر عنصر الارتكاز.

- عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

4- جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:
- نستبدل المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل و ذلك في العمود الأول أي عمود متغيرات الأساس.

- يجري تحويل عمود عنصر الارتكاز الى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز الى القيمة 1 و عناصر العمود الأخرى الى قيم معدومة.

- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما باستخدام طريقة التركيبات الخطية أو باستخدام قاعدة المستطيلات كما تم ذلك في حالة التعظيم على النحو التالي:

جدول 1				
	a		b	
	c		d	

يتم تقسيم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز. يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a . تتحول بقية عناصر عمود عنصر الارتكاز الى أصفار فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر، أما القيمة التي نحل مكان d فتحسب كما يلي:

$$d - \frac{b \times c}{a}$$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الارتكاز و عمود عنصر الارتكاز مقسوم على قيمة عنصر الارتكاز. و تصبح عناصر الجدول الثاني كما يلي:

جدول 2				
	1		b/a	

	0	$d - \frac{b \times c}{a}$

5- نستمر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية الى الخطوة 3. وهذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الاقتصادية موجبة. معدومة، وحينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل وفيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي الى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل (العمود الأخير في الجدول) وبقية المتغيرات معدومة، أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال 3-7: أوجد حل أمثل للبرنامج التالي (مثال 2-2) باستعمال طريقة الجداول:

$$\text{Min: } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- يتم إيجاد الصيغة النموذجية. و تصبح القيود كما يلي:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a &= 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a &= 6 \\ x_2 - x_7^e + x_8^a &= 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, \\ x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0 \end{aligned}$$

كما تصبح الدالة الاقتصادية على النحو التالي:

$$\text{Min: } Z = 10x_1 + 30x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

$$\text{Min: } Z = 10x_1 + 30x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

أو

كما سبق الإشارة فإن المتغيرات الاصطناعية أخذت المعامل M بإشارة موجبة و يفترض فيه أن يكون كبيراً جداً و هذا حتى تكون المتغيرات المضروبة فيه و التي هي مجرد متغيرات مساعدة، خارج نظام الحل الأساسي النهائي، لكونها أولى المتغيرات المرشحة للخروج من الأساس لكون معاملاتها كبيرة جداً.

$$x_4^a = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e$$

$$x_8^a = 2 - x_2 + x_7^e$$

ثم نعوضها في دالة الهدف المحولة:

$$\text{Min: } Z = 10x_1 + 30x_2 + M(6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e) + M(6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e) + M(2 - x_2 + x_7^e).$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد:

$$Z = (10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + 14M$$

يجعل دالة الهدف تساوي صفر، و هي نقطة الإنطلاق في إيجاد الحل نجد:

$$(10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -14M$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	3	2	-1	1	0	0	0	0	6
x_6^a	6	1	0	0	-1	1	0	0	6
x_8^a	0	1	0	0	0	0	-1	1	2
ΔZ	10-9M	30-4M	M	0	M	0	M	0	-14M

جدول 3-6

على عكس الحال كما هو في حالة التعظيم فإنه في حالة التدنيس تكون المتغيرة التي تدخل الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة سالبة وهي في مثالنا 10-9M و بالتالي فالمتغيرة التي تدخل الأساس هي x_1 و يكون عمود عنصر الارتكاز هو العمود الأول. أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المقابلة لأصغر نسبة بين عمود الثوابت وعمود عنصر الارتكاز، هي x_6 . و عليه نجري التحويلات اللازمة كما جرى في حالة التعظيم فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	0	3/2	-1	1	1/2	/	0	0	3
x_1	1	1/6	0	0	-1/6	/	0	0	1
x_8^a	0	1	0	0	0	/	-1	1	2
ΔZ	0	(170-15M)/6	M	0	(10-3M)/6	/	M	0	-5M-10

جدول 3-7.

لاحظ بأن عناصر عمود المتغيرة الإطناعية التي خرجت من الأساس لم يتم حسابها و تم الاستغناء عنها لأن الخوارزمية لا يمكن أن تدخلها إلى الأساس مرة ثانية. بما أن المعاملات في السطر الأخير ليست كلها غير سالبة، لذلك فالمتغيرة المرشحة للدخول إلى الأساس بأكثر سرعة هي المقابلة للمعامل (170-15M)/6 و بالتالي فهي x_2 و يتحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز، أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي إما x_4^a أو x_8^a لأن كلاهما مقابلان لأقل نسبة بين عمود الثوابت و عمود عنصر الارتكاز و في هذه الحالة نأخذ واحدة لا على التبعين. بفرض أن المتغيرة التي تخرج هي التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	-2/3	/	1/3	/	0	0	2
x_1	1	0	1/9	/	-2/9	/	0	0	2/3
x_8^a	0	0	2/3	/	-1/3	/	-1	1	0=ε
ΔZ	0	0	(-6M+170)/9	/	(3M-70)/9	/	M	0	-200/3

جدول 3-8.

بنفس المنهجية، فإن المتغيرة التي تدخل الأساس هي x_3^e و التي تخرج x_8^a ، لاحظ أن قيمة x_8^a المقابلة هي 0 و قد فرضناها (ε) وهي قيمة بجوار الصفر، وهذا لتسهيل عملية الحسابات، على أن تأخذ قيمتها الحقيقية عند نهاية الحل. وبإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	0	/	0	/	-1	/	2
x_1	1	0	0	/	-1/6	/	1/6	/	2/3
x_3^e	0	0	1	/	-1/2	/	-3/2	/	0
ΔZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	-200/3

جدول 3-9.

بما أن كل عناصر السطر الأخير أصبحت غير سالبة، فنكون بذلك حصلنا على جدول الحل الأمثل و تكون قيم المتغيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي:

$$x_1 = 2/3$$

$$x_2 = 2$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي:

$$Z = 200/3$$

و هي نفس النتائج المحصل عليها باستخدام الطريقة البيانية .
يمكن التحقق من مدى إحترام القيود بالتعويض في كل قيد كما يلي:

القيد الأول: $3x_1 + 2x_2 \geq 6 \Rightarrow 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times 2 = 6$ أي أن القيد محقق تماماً و هو ما يؤكد أن متغيرة الفجوة x_3^e تكون قيمتها بالفعل معدومة.

القيد الثاني: $6x_1 + x_2 \geq 6 \Rightarrow 6 \times \frac{2}{3} + 2 = 6$ و هو قيد محقق أيضاً تماماً.

و يلاحظ أيضاً أن القيد الثالث محقق تماماً.

مثال 3-8: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي بإستعمال طريقة السمبليكس.

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يتم أولاً إيجاد الصيغة النموذجية و هي :

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3^e + x_4^a = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_5^e + x_6^a = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

من مجموعة القيود نستخرج قيم المتغيرات الإصطناعية و نعوضها في دالة الهدف كما يلي:

$$x_4^a = 10 - 5x_1 - 6x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 14 - 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2 + M(10 - 5x_1 - 6x_2 + x_3^e) + M(14 - 2x_1 - 7x_2 + x_5^e)$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Min: } Z = (3 - 7M)x_1 + (10 - 13M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + 24M$$

عند $Z=0$ نجد:

$$(3 - 7M)x_1 + (10 - 13M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M$$

و يكون الجدول الأساسي الأول على الشكل:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	5	6	-1	1	0	0	10
x_6^a	2	7	0	0	-1	1	14
ΔZ	3-7M	10-13M	M	0	M	0	-24M

جدول 3-9.

- المتغيرة x_2 هي المرشحة للدخول الى الأساس لكونها تقابل أقل قيمة في سطر معاملات دالة الهدف، لأن الافتراض الأساسي هو أن قيمة M كبيرة جداً و هي أساساً قيمة مساعدة خارج النظام، و هذا الافتراض هو الذي يجعلها تزاح في النهاية كلية بفعل منطق الخوارزمية المتبعة في الحل.

- العمود الذي تنتمي إليه x_2 هو عمود عنصر الارتكاز.

- المتغيرة التي تخرج هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة لحاصل قسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المقابلة في عمود عنصر الارتكاز، وهي في السطر الأول ، يسمى هذا السطر بـ سطر عنصر الارتكاز، و يكون

عنصر الارتكاز هو القيمة 6 أي العنصر الموجود عند تقاطع عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

نجري التحويلات كما جرت في حالة التعظيم، فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_2	5/6	1	-1/6	/	0	0	10/6
x_6^a	-23/6	0	7/6	/	-1	1	7/3
ΔZ	(23M-32)/6	0	(10-7M)/6	/	M	0	(-14M-100)/6

جدول 10-3

من الجدول نجد:

$$x_1=0$$

$$x_2=10/6$$

$$x_6^a=7/3$$

$$x_3^e=x_4^a=x_5^e=0$$

يمكن التأكد من قيمة الدالة الاقتصادية بتعويض المتغيرات في الدالة الاقتصادية كما هي في الصيغة النموذجية.

هل هذا الحل أمثل؟ هو غير أمثل لأن ليس كل عناصر السطر الأخير موجبة. وعليه ينبغي تحسين الحل.

المتغيرة المرشحة للدخول هي x_3^e و المتغيرة المرشحة للخروج هي x_6^a . بإجراء التحويلات اللازمة نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_2	12/42	1	0	/	-1/7	/	2
x_3^e	-23/7	0	1	/	-6/7	/	2
ΔZ	1/7	0	0	/	10/7	/	-20

جدول 11-3

بما أن كل معاملات الدالة أصبحت غير سالبة لذلك نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وهو:

$$x_1=0$$

$$x_2=2$$

$$x_3^e=2$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

و قيمة الدالة الاقتصادية هي: $Z=20$ (لاحظ أننا أهملنا الإشارة -).

ويمكن التحقق من صحة الحل في القيود و في الدالة حيث نجد:

$$\text{عند القيد الأول: } 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \Rightarrow 0 + 6 \times 2 = 12 > 10$$

و هو قيد محقق و تبقى طاقة غير مستغلة قيمتها 2 و هذا ما تعبر عنه متغيرة الفجوة $x_3^e=2$

$$\text{عند القيد الثاني: } 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \Rightarrow 0 + 7 \times 2 = 14$$

و هو قيد محقق تماماً.

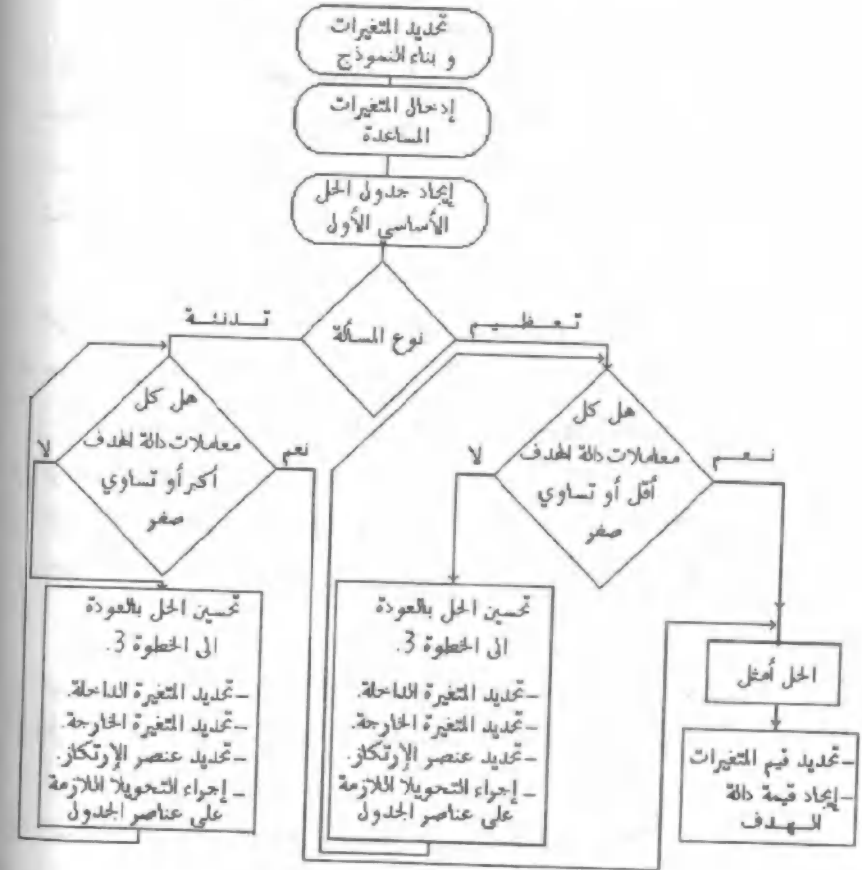
و بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Z = 3x_1 + 10x_2 = 0 + 10 \times 2 = 20$$

و هي نفس القيمة التي وجدناها في آخر خانة في جدول الحل الأمثل، إنما مأخوذة بالقيمة المطلقة.

و واضح أن هذا الحل هو أفضل حل ممكن إذ لا يمكن إيجاد أية قيمة أخرى للمتغيرات تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية و تحترم في نفس الوقت جميع القيود.

مخطط إيجاد الحل الأمثل.



سابعاً: عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات: يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السالبة، غير أن خوارزمية الحل بطريقة السيمبليكس تشترط عدم سالبية كل المتغيرات، لذا يجب التحايل رياضياً، بحيث ندخل إلى النظام متغيرات كلها غير سالبة وذلك وفق المعالجات التالية:

1- إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر: أي $x_j \leq 0$ في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض: $x_j = -x'_j$ حيث: $x'_j \geq 0$

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم تتبع خوارزمية الحل و نوجد الحل الأمثل بشكل عادي، و حينئذ نحول المتغير x'_j إلى أصله و وفق التحويل الأولي.

2- إذا كان أحد المتغيرات حراً: أي يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت في الاتجاه الموجب أو السالب، أي:

$$x_j \in (-\infty, +\infty)$$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

$$x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$$

حيث:

أي أن x_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث:

- إذا كان x_j موجبا يكون: $x'_j > x''_j$

- إذا كان x_j سالبا يكون: $x'_j < x''_j$

- إذا كان x_j معدوماً يكون: $x'_j = x''_j$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نوجد الحل الأمثل، و نقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي و وفق صيغة التحويل أعلاه.

مثال 3-9: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max : } Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

بما أن x_2 سالب، لذلك نحري التحويل التالي:

نفرض أن: $x_2 = -x'_2$ حيث: $x'_2 \geq 0$ ، بالتعويض في

البرنامج أعلاه نحصل على البرنامج المحور التالي:

$$\text{Max : } Z = 3x_1 - 3x'_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5x_1 - 6x'_2 \leq 10 \\ 2x_1 - 2x'_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0 \end{cases}$$

و تكون الصيغة النموذجية للبرنامج هي:

$$\text{Max : } Z = 3x_1 - 3x'_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5x_1 - 6x'_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - 2x'_2 + x_4 = 14 \\ x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x'_2	x_3	x_4	B
x_3	5	-6	1	0	10
x_4	2	-2	0	1	14
ΔZ	3	-3	0	0	0

جدول 3-12.

عن طريق خوارزمية السمبلكس نلاحظ أن x_1 مرشحة للدخول الى الأساس، و x_3 مرشحة للخروج من الأساس، و عليه يكون جدول الحل الأساسي الثاني على النحو:

	x_1	x'_2	x_3	x_4	B
x_1	1	-6/5	1/5	0	2
x_4	0	2/5	-2/5	1	10
ΔZ	0	3/5	-3/5	0	-6

جدول 3-13

من الجدول أعلاه نجد أن x'_2 مرشحة للدخول و x_4 مرشحة للخروج، و عليه يكون جدول الحل الأمثل هو:

	x_1	x'_2	x_3	x_4	B
x_1	1	0	-1	3	32
x'_2	0	1	-1	5/2	25
ΔZ	0	0	0	-3/2	-21

جدول 3-14

من هذا الجدول نجد:

$$\begin{aligned} x_1 &= 32 \\ x'_2 &= 25 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

و قيمة الدالة الاقتصادية هي: $Z=21$

بعد إيجاد جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 على أساس التحويل المفترض مع بداية الحل و هو $x_2 = -x'_2$.
بما أن:

$$x'_2 = 25$$

لذلك فإن:

$$x_2 = -25$$

و حيث أن الدالة الاقتصادية الأصلية هي:

$$Z=3x_1+3x_2$$

بالتعويض نجد:

$$Z=3(32)+3(-25)=21$$

أي أن قيمة الدالة الاقتصادية تبقى هي نفسها بدون تغيير.
مثال 3-10: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة x_2 حر يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت موجبة أو سالبة. لذلك نفترض أن هذه المتغيرة عبارة عن الفرق بين متغيرين كلاهما موجب، أي:

$$x_2 \geq 0, x_2'' \geq 0 \quad \text{مع} \quad x_2 = x_2' - x_2''$$

بالتعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 10(x_2' - x_2'')$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6(x_2' - x_2'') \leq 10 \\ 2x_1 + 7(x_2' - x_2'') \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

بفك الأقواس نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 10x_2' - 10x_2''$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

بإدخال متغيرات الفجوة نحصل على الصيغة النموذجية التالية:

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 10x_2' - 10x_2''$$

$$\text{s/c } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' + x_3^e = 10 \\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + x_4^e = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يكون جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	B
x_3^e	5	6	-6	1	0	10
x_4^e	2	7	-7	0	1	14
ΔZ	3	10	-10	0	0	0

جدول 3-15

و يتم إيجاد الحل بطريقة السمبلكس و هذا ما يظهره الجدول التالي:

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	B
x_2'	5/6	1	-1	1/6	0	10/6
x_4^e	-23/6	0	0	-7/6	1	7/3
ΔZ	-16/3	0	0	-10/6	0	-50/3

جدول 3-16

حيث أن الحل الأمثل هو:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2' &= 10/6 \\ x_2'' &= 0 \\ x_3^e &= 0 \\ x_4^e &= 7/3 \end{aligned}$$

و أعظم قيمة للدالة الاقتصادية هي: $Z=50/3$

تمارين

تمرين 1: باستخدام طريقة السمبليكس، أوجد حل لجميع مسائل سلسلي الفصل الأول و الثاني.

تمرين 2: أوجد حلول البرامج الخطية التالية بطريقة السمبليكس:

$$\text{Max : } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \quad \text{Min: } Z = 80x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 - x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

$$x_1 = 0.5833, x_2 = 0.4167 \\ Z = 71.67$$

الحل: $x_1 = 7/3, x_4 = 43/9, x_5 = 4$ بقية المتغيرات معدومة. $Z = 31.77$

$$\text{Max: } Z = 60x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 90x_4 \quad \text{Max: } Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\ -7x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 400 \\ 0 \leq x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 = 600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{الحل: } x_1 = 7/61, x_2 = 0, x_3 = 4/61, x_4 = 0 \\ Z = 780/61$$

$$\text{الحل: } Z = 2100, x_1 = x_2 = 300$$

$$\text{Max : } Z = 100x_1 + 150x_2 + 200x_3 \quad \text{Max : } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 + 12x_3 \leq 65 \\ -7x_1 - 8x_2 + 12x_3 \leq -45 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 4000 \\ x_2 \leq 5000 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 6000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل: $x_2 = 6.47, x_3 = 0.56$ بقية المتغيرات معدومة.

$$Z = 1083.333$$

$$\text{الحل: } x_1 = 2666, x_2 = 5000$$

$$Z = 3299, x_3 = 1333$$

بعد إيجاد قيم المتغيرتين x_2' و x_2'' في جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 و هي عبارة عن الفرق بينهما حسب معادلة التحويل أعلاه و هي:

$$x_2 = x_2' - x_2''$$

$$x_2 = 10/6 - 0 = 10/6$$

و هي قيمة موجبة هنا، و يمكن أن تكون سالبة فيما لو كانت x_2'' أكبر من x_2'

ثامنا: حالات أخرى: أثناء سيرورة الحل قد تصادف عدة حالات خاصة، منها:

1- إنعدام وجود حل أمثل: في هذه الحالة نصل الى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التذنتة، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير إصطناعي واحد أو أكثر، و هذا ما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2- محدد محدودية الحل: و هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الارتكاز أقل أو تساوي الصفر، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت و عناصر عمود عنصر الارتكاز.

3- الإنعزال: نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول الى الأساس، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. و في الحالتين نختار واحدة لا على التعيين.

تمارين 3: أوجد حلول البرامج الخطية التالية بطريقة السمبليكس:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 15 \\ 15x_1 + 12x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{الحل: } x_1=7.5 \quad Z=22.5$$

$$\text{Min: } Z = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 5 \\ 10x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{الحل: } x_1=2.5 \quad Z=75$$

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min: } Z = -x_1 + x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

الفصل الرابع

الثنائية أو البرنامج المرافق

لكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ مشتق منه
معرف حسب الحالة كما يلي:

أولاً: **ثنائية الصيغ القانونية**: إذا كان البرنامج الأولي
بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية:

$$\text{Max: } Z = C'X$$

$$\text{s/c} \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$\text{Min: } Z = B'Y$$

$$\text{s/c} \begin{cases} A'Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

فلإنجاد البرنامج الثنائي لأي برنامج أولي في صيغته القانونية
تتبع الخطوات التالية:

1- تقلب صيغة دالة الهدف، إذا كانت الصيغة في البرنامج
الأولي هي: Min فإنها تتحول الى Max في البرنامج الثنائي، و
إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي Max فإنها تتحول الى
Min في البرنامج الثنائي.

2- تتعاكس المتراجحات، بحيث \leq (أقل أو تساوي) في حالة Max تتحول الى
 \geq (أكبر أو تساوي)، و \geq (أكبر أو تساوي) في حالة Min تتحول الى
 \leq (أقل أو تساوي).

3- إذا كانت متغيرات البرنامج الأولي هي: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ فإن متغيرات البرنامج الثنائي هي: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ حيث m هي عدد قيود البرنامج الأولي.

4- عمود الثوابت في البرنامج الأولي يتحول إلى معاملات متغيرات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.

5- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب.

6- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي، تتحول إلى ثوابت قيود البرنامج الثنائي بنفس الترتيب.

7- في كلا البرنامجين تكون المتغيرات غير سالبة (مادام صيغة البرنامج الأولي قانونية).
و تفصيلا إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية:

$$\text{Max: } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي هو:

$$\text{Min: } Z = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

لاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي هو بعدد القيود في البرنامج الأولي.

و يلاحظ أيضا أن هذين البرنامجين متناظرين، و يظهر التناظر عموما من خلال الجدول 4-1.

	x_1	x_2	x_3	.	.	x_n	\geq	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}	\leq	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	a_{2n}	\leq	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	.	.	a_{3n}	\leq	b_3
.
.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.	.	a_{mn}	\leq	b_m
\geq	\geq	\geq	\geq	.	.	\geq		
0	c_1	c_2	c_3	.	.	c_n		$\begin{matrix} \text{Min} \\ \text{Max} \end{matrix}$

جدول 4-1.

8- في جدول الحل الأمثل تكون العلاقة بين متغيرات البرنامجين كما في الجدول 4-2.

البرنامج	المتغيرات الرئيسية	متغيرات الفجوة
الأولي	x_1, x_2, \dots, x_s	$x_1^e, x_2^e, \dots, x_r^e$
البرنامج الثنائي	$y_1^e, y_2^e, \dots, y_s^e$	y_1, y_2, \dots, y_r
	متغيرات الفجوة	متغيرات رئيسية

جدول 4-2

9- في جدول الحل الأمثل للبرنامجين نحدد:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة و التي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي و بالقيمة المطلقة.
- و قيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي.

- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي و التي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي و التي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، و قيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي و التي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي و التي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل. (بالقيمة المطلقة).

- قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، و في كلا الحالتين نأخذ قيمتها المطلقة.

مثال 4-1: من البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- أوجد جدول الحل الأمثل.

2- أوجد البرنامج الثنائي. ثم أوجد جدول حل

الأمثل.

3- قارن نتائج الحل في البرنامجين. ماذا تستنتج؟

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل:

الصيغة النموذجية هي:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2 + Mx_4 + Mx_6$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_5 + x_6 = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

من الصيغة النموذجية نستنتج:

$$x_4^a = 10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Z = 3x_1 + 10x_2 + M(10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e) + M(14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e)$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة و جعل $Z=0$ نجد:

$$(3 - 3M)x_1 + (10 - 8M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M$$

و عليه يكون جدول الحل الأساسي الأول:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	5	1	-1	1	0	1	10
x_6^a	-2	7	0	0	-1	1	14
ΔZ	(3-3M)	(10-8M)	M	0	M	0	-24M

جدول 3-4

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي x_2 و المرشحة للخروج

من الأساس هي x_4^a ، و عنصر الارتكاز هو 7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	37/7	0	1-	1	1/7	/	8
x_2	-2/7	1	0	0	-1/7	/	2
ΔZ	41-37M	0	M	0	10-M	/	-8M-20
	7				7		

جدول 4-4

الحل في الجدول الثاني غير أمثل لأن ليس كل عناصر الصف الأخير موجبة.

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي x_1 و المرشحة للخروج

منه هي x_4^a ، و عنصر الارتكاز هو 37/7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول 4-5.

متغيرات مساعدة						
	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a
B						
x_1	1	0	-7/37	/	1/37	/
x_2	0	1	-2/37	/	-35/259	/
ΔZ	0	0	41/37	/	37/47	/

حل البرنامج الثنائي

جدول 4-5

كل معاملات الدالة أصبحت موجبة و بالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل.

حيث: $x_1=56/37$ $x_2=90/37$ $Z=1068/37$

2- إيجاد البرنامج الثنائي و حله الأمثل:

أ- إيجاد البرنامج الثنائي:

بتطبيق قواعد التحويل فإن البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max: } Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ y_1 + 7y_2 \leq 10 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب- حل البرنامج الثنائي: الصيغة النموذجية هي:

$$\text{Max: } Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 + y_3^e = 3 \\ y_1 + 7y_2 + y_4^e = 10 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3^e \geq 0, y_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و منه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	B
y_3^e	5	-2	1	0	3
y_4^e	1	7	0	1	10
ΔZ	10	14	0	0	0

جدول 4-6

المتغيرة التي تدخل الأساس هي y_2 و التي تخرج منه هي y_4^e وعنصر الارتكاز هو 7. و جدول الحل الأساسي الثاني هو:

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	B
y_3^e	37/7	0	1	2/7	41/7
y_2	1/7	1	0	1/7	10/7
ΔZ	8	0	0	-2	-20

جدول 4-7

يلاحظ أيضاً أن الحل غير أمثل، المتغيرة التي تدخل هي y_1 و المتغيرة التي تخرج هي y_3^e و عنصر الارتكاز هو 37/7. ويكون جدول الحل الأمثل هو:

متغيرات مساعدة				
	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e
y_1	1	0	7/37	2/37
y_2	0	1	-1/37	35/259
ΔZ	0	0	-56/37	-90/37

حل البرنامج الأولي

جدول 4-8

كل معاملات الدالة أصبحت أقل أو تساوي الصفر، لذلك فالحل أصبح أمثلياً:

حيث: $y_1=41/37$ $y_2=47/37$ $Z=1068/37$

3- المقارنة و الاستنتاج:

من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

بقية المتغيرات معدومة.

و إذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:
 x_3^0 تقابلها القيمة 41/37 ، و هي قيمة y_1 في البرنامج الثنائي.
 x_5^0 تقابلها القيمة 37/47 ، و هي قيمة y_2 في البرنامج الثنائي.

ملاحظة: إن هذا التقابل يتم على وجه الترتيب، مع إهمال الإشارة السالبة.
كما أن قيمة الدالة الاقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين. و الجدول التالي يوضح ذلك:

البرنامج	x_1	x_2	x_3^0	x_5^0	B	
الأولي	x_1				56/37	$\leftarrow y_3^0$
	x_2				90/37	$\leftarrow y_4^0$
	ΔZ	0	0	41/37	37/47	-1068/37
			\uparrow y_1	\uparrow y_2		الثنائي

جدول 4-9

و النتيجة هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، و جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

ثانياً، ثنائية الصيغ المختلطة: في هذه الحالة فإنه يتم إيجاد الثنائية وفق القواعد التالية:

قاعدة 1: إذا كان القيد في المسألة الأولية من الشكل $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ فإن

المتغير y_i المرافق له في المسألة الثنائية يكون حراً أي $y_i \in (-\infty, +\infty)$. ومعنى آخر مقابل كل متغير فجوة معدوم في قيد المسألة الأولية، يقابله متغير أساس حر في المسألة الثنائية.

قاعدة 2: إذا كان أحد المتغيرات x_i في المسألة الأولية حراً أي

$x_i \in (-\infty, +\infty)$ فإن القيد رقم i المقابل في المسألة الثنائية يكون على

الشكل: $\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = c_i$. بمعنى آخر مقابل كل متغير أساس حر في المسألة الأولية متغير فجوة معدوم في المسألة الثنائية.

قاعدة 3: إذا كان القيد في المسألة الأولية -حالة التعظيم- على الشكل

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ يتم تحويله الى الصيغة القانونية بضرب الطرفين في الإشارة (-)

فيصبح القيد على الشكل $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$ ويكون المتغير y_i المرافق في الثنائية

غير سالب، أي $y_i \geq 0$.

نظريات:

- **نظرية 1:** ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.

- **نظرية 2:** إذا كان للبرنامج الأولي حل أمثل ، فإن قيمة دالة الهدف في البرنامجين تكون متساوية.

- **نظرية 3:** - إذا كان حل البرنامج الأولي لانهائي، فإن ثنائيته تكون متناقضة.

- إذا كان البرنامج الأولي متناقض، فإن البرنامج الثنائي يكون لانهاضي أو متناقض.

أمثلة 2-

البرنامج الأولي

$$\text{Max: } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min: } Z = 2x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بحول الى الصيغة التالية ثم الى البرنامج الثنائي.

$$\text{Min: } Z = 2x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي.

$$\text{Min: } Z = 6y_1 + 14y_2 - 2y_3$$

$$s/c \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 30 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max: } Z = -2y_1 - 2y_2 + 5y_3$$

$$s/c \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min: } Z = -x_1 + 2x_2$$

$$s/c \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \leq 30 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بحول الى الصيغة التالية ثم الى البرنامج الثنائي:

$$\text{Min: } Z = -x_1 + 2x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max: } Z = -30y_1 - 2y_2$$

$$s/c \begin{cases} 5y_1 - y_2 \leq -1 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max: } Z = 100y_1 - 50y_2 + 20y_3 \quad \text{Min: } Z = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$s/c \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 9 \\ 5y_1 + y_3 \leq 2 \\ 10y_1 + y_2 + 7y_3 = 4 \\ y_1 - y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \geq 100 \\ -4x_1 - x_2 - x_4 \geq -50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

تمارين

تمرين 1: أوجد ثنائيات كل البرامج الخطيصة المعروضة في سلسلي الفصول الأول والثاني والثالث.

تمرين 2: أوجد ثنائيات البرامج التالية:

$\text{Max: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ $s/c \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$	$\text{Max: } Z = x_1 + 7x_2 + 2x_3$ $s/c \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$
	$\text{Max: } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$ $s/c \begin{cases} -x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

تمرين 3: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ -2x_1 - 7x_2 \leq -14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: 1- أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج.

2- أوجد ثنائية البرنامج.

3- أوجد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وحدد

العلاقة بين الحلين.

تمرين 4: أجب على نفس أسئلة التمرين السابق بالنسبة للبرنامج التالي:

$$\text{Min: } Z = -x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمارين محملة: أوجد البرنامج المرافق لصيغ البرامج التالية وأوجد جداول الحل الأمثل للبرامجين و قارن النتائج. ماذا تستنتج في كل حالة؟

حل البرنامج الثاني	البرنامج الثاني	حل البرنامج الأول	البرنامج الأول
			$\text{Max: } Z = 150x_1 + 20x_2$ $s/c \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \leq 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \leq 550 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
	$\text{Min: } Z = 15y_1 + 8y_2 + 4y_3$ $s/c \begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 20 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$		
			$\text{Max: } Z = 5x_1 + 10x_2$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
	$\text{Min: } Z = -24y_1 + 16y_2$ $s/c \begin{cases} -4y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ -8y_1 + 2y_2 \geq 8 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$		

الفصل الخامس

برمجة الأعداد الصحيحة.

بعض المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية، لا يمكن تجزئتها، و إلا فقدت صفتها. فعندما نكون بصدد تحديد كميات الثلاجات الراجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20.4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة، فنقول أن الإنتاج اليومي هو 20 جهازا أو 21 جهاز. وفي البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمها بالفاصلة وهو ما أدى الى البحث في التخلص من هذا المشكل، فتتج ما يسمى ببرمجة الأعداد الصحيحة.

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد صحيحة، و يتطلب ذلك المرور بعدة مراحل.

*** المرحلة الأولى:** إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذا حصل حل أمثل متغيراته لا تحمل قيما صحيحة تنتقل الى المرحلة الثانية.

*** المرحلة الثانية:** تسمى بمرحلة التفريع، و فيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي، بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، و تستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل الى حل أمثل متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وهناك طريقتين الأولى هي طريقة التفريع و التحديد و الثانية هي طريقة القطع، و نظرا لأن الطريقة الأولى هي الأكثر شيوعا و سهولة لذلك فسوف نقتصر عليها.

		$\text{Max: } Z = 20x_1 + 15x_2$ $s/c \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
	$\text{Max: } Z = 21y_1 - 13y_2$ $s/c \begin{cases} 10y_1 - 5y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 12y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$	
		$\text{Max: } Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \forall \end{cases}$

يتم إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفريع والتحديد للبرنامج الأول كما ورد أصلاً دون اعتبار لشرط المتغيرات أعداد صحيحة. إذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل صحيحة، تتوقف و يكون ذلك هو الحل المراد الوصول إليه، وإذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل للبرنامج الأصلي ليست قيماً صحيحة فحينئذ نقوم بتوليد برنامج جديد، حيث يضاف إلى البرنامج الأصلي قيد آخر وفق ما يلي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو x_j حيث يأخذ قيمة غير صحيحة ولتكن b_i ، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي:

$$b_{i1} < x_j < b_{i2}$$

حيث b_{i1} و b_{i2} أعداداً صحيحة غير سالبة، فلتجنب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما $x_j \leq b_{i1}$ و $x_j \geq b_{i2}$ ، ونضيف كل قيد منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلاً مستقلاً، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف، و نأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدالة الاقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم وأقل قيمة للدالة الاقتصادية في حالة التذئسة، وإلا نستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الاقتصادية وهذا لغاية الوصول إلى حل أمثل فيه متغيراته صحيحة، وهذا ما يسمى بالتفريع.

مثال 5-1: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$1-5 \quad s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة

جدول الحل الأمثل للبرنامج 1-5 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	B
x_1	1	5/2	1/4	11/2
ΔZ	0	-48	-5	-110

$$Z=110 \text{ و } x_2=0 \text{ و } x_1=11/2=5.5$$

النتيجة:

يلاحظ أن x_1 هو قيمة غير صحيحة، ويمكن كتابتها كما يلي:

$$5 < x_1 < 6$$

أي يمكن إستنتاج قيدين الأول هو: $x_1 \leq 5$ والثاني هو: $x_1 \geq 6$.

و عليه فإن البرنامج الأصلي يفرع إلى برنامجين الأول يتكون من البرنامج الأصلي مضافاً إليه القيد الأول المستنتج وهو $x_1 \leq 5$ و الثاني أيضاً يتكون من البرنامج الأصلي مضافاً إليه القيد $x_1 \geq 6$ ، وهما:

البرنامج الثاني

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$3-5 \quad s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

البرنامج الأول

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$2-5 \quad s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة

نوجد الحل الأمثل لكل برنامج من البرنامجين:

جدول الحل الأمثل للبرنامج 2-5 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	B
x_2	0	1	1/10	-4/10	1/5
x_1	1	0	0	1	5
ΔZ	0	0	-1/5	-96/5	-502/5

$$Z=502/5 \text{ و } x_2=1/5=0.2 \text{ و } x_1=5$$

النتيجة:

بينما البرنامج 3-5 متناقض و ليس له حل، لذلك يتم الاستغناء عنه.

من خلال حل البرنامج 2-5 وجدنا أن المتغيرة x_2 لاتأخذ قيمة صحيحة ويمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$0 < x_2 < 1$$

و منه نستنتج القيد الأول هو $x_2 \geq 1$ و الثاني $x_2 < 0$ هو مرفوض لتناقضه مع شرط عدم السالبة.

لذلك فالبرنامجين الجديدين المتفرعين عن البرنامج 2-5 هما:

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$5-5 \quad \text{s/c} \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

$$\text{Max: } Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$4-5 \quad \text{s/c} \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

غير أن البرنامج 5-5 يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $x_2 \leq 0$ مرفوض ويتناقض مع شرط عدم السالبة.

أما جدول الحل الأمثل للبرنامج 4-5 فهو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^a	B
x_1	1	0	1/4	0	10/4	/	3
x_4^e	0	0	-1/4	1	-10/4	/	2
x_2	0	1	0	0	-1	/	1
ΔZ	0	0	-5	0	-48	/	-62

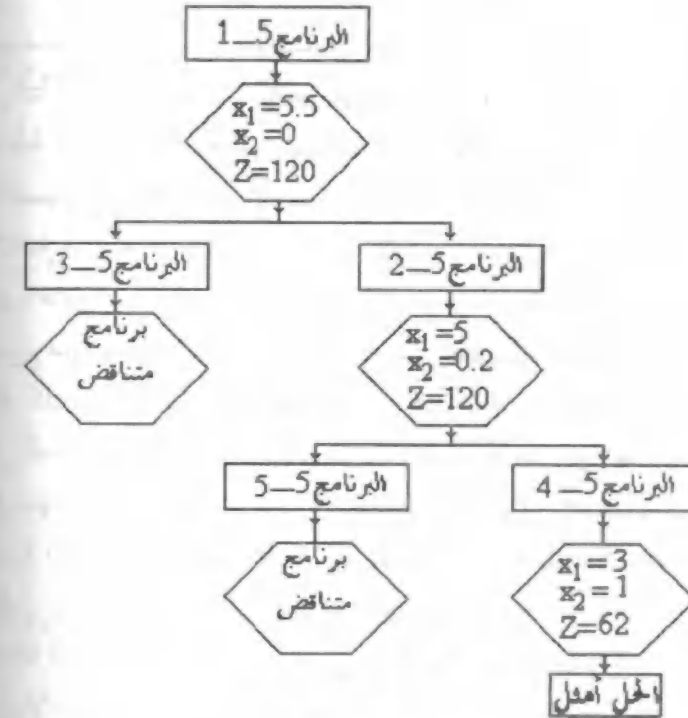
النتيجة: $x_1=3$ و $x_2=1$ و $Z=62$.

يلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة، و بالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل الحد الأسفل للمسألة، و تكون كل الحلول الأخرى التي لم تعطي قيمة صحيحة للمتغيرات ملغاة. و يكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي أي البرنامج 1-5، و هو يحققه بالكامل ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في البرنامج الأصلي.

و المخطط 1-5 يوضح التفرعات المستنتجة من البرنامج الأصلي حتى الحصول على الحل الأمثل.

و الخلاصة هي أنه إذا كان الحل الأمثل للبرنامج الأصلي-حالة التعظيم- متغيراته ليست أعدادا صحيحة، فإنه يستمر التفرع حسب منهجية المثال السابق، حتى نحصل على حل أمثل متغيراته كلها أعدادا صحيحة، و يكون هذا الحل هو الحل الأسفل للمسألة، و كل البرامج المتفرعة الأخرى تصبح ملغاة، بما فيها البرامج التي أدت الى حلول تتضمن أعدادا صحيحة لكن قيمة دالة هدفها المحصلة أقل من قيمة دالة الهدف لحل الحد الأسفل.

و في حالة التدنئة فإن الطريقة هي نفسها، تتبع ما عدا أن حل البرنامج الأصلي يكون هو حل الحد الأسفل و حل البرنامج النهائي الذي يتضمن أعدادا صحيحة يكون هو حل الحد الأعلى للمسألة.



تمارين

تمرين 1: أوجد حلول برامج تمارين الفصول الأول، الثاني، الثالث و الرابع ، بإفتراض أن المتغيرات أعداد صحيحة.

تمرين 2: أوجد حلولاً للبرامج الخطية التالية :

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s/ c} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s/ c} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$\text{Max: } Z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\text{s/ c} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$\text{Max: } Z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$$

$$\text{s/ c} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30000 \\ 2x_1 + 15x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

و هي صحيحة.

الفصل السادس

مسائل النقل - تصغير التكاليف-

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث العمليات قسم البرمجة الخطية، باعتبارها تهدف أيضا الى الوصول الى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية. وعلى وجه الخصوص تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أو معنوي من مجموعة من المناطق الى مناطق أخرى و في حدود كميات محددة، أو البحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه، لذا فإنها شائعة الاستخدام على مستوى الإقتصاد الجزئي، في المؤسسات الإنتاجية والتجارية وغيرها، و سوف نتطرق في هذا الفصل الى الحالة الأولى و هي حالة تدنئة تكاليف النقل، و نتطرق للحالة الثانية و هي حالة التعظيم في الفصل الموالي.

أولاً: عرض المسألة: تعرض مسائل النقل في حالة التدنئة و هي الحالة الشائعة بشكل مشابه للإفترض التالي:

نفترض أن مؤسسة إقتصادية لها ثلاث وحدات إنتاجية متواجدة في أماكن مختلفة، كل وحدة تتيح إمكانيات العرض التالية:

- الوحدة 1 تعرض الكمية a_1 .

- الوحدة 2 تعرض الكمية a_2 .

- الوحدة 3 تعرض الكمية a_3 .

و هذا من السلعة التي تنتجها و يفترض أنها متشابهة.

تُكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث بتموين 4 مناطق مختلفة من تلك السلعة، بحيث أن كميات الطلب لكل منطقة هي على الشكل التالي:

- المنطقة 1 الكميات التي تطلبها هي: b_1 .

- المنطقة 2 الكميات التي تطلبها هي: b_2 .

- المنطقة 3 الكميات التي تطلبها هي: b_3 .

- المنطقة 4 الكميات التي تطلبها هي: b_4 .

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج من وحدة الإنتاج i الى المنطقة المراد
تموينها z محددة محاسبيا و هي c_{ij} ، و هي معروضة في الجدول التالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
الوحدة 2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
الوحدة 3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

جدول 1-6

يكون المطلوب هو تموين المناطق الأربعة بكل احتياجاتها من
خلال الوحدات الثلاث، على أن تتحمل المؤسسة أقل تكلفة
ممكنة و في حدود طاقات العرض لكل وحدة من وحدات
المؤسسة. و بمعنى آخر يكون الهدف هو الإجابة على السؤال
التالي: ماهي الكميات التي يجب على كل وحدة أن تمون بها
كل منطقة مع ضمان حصول كل منطقة على احتياجاتها
كاملة، و في حدود الطاقة القصوى المتاحة لكل وحدة إنتاجية،
و هذا بشرط أن تتحمل المؤسسة التي تنتمي إليها هذه
الوحدات أقل تكلفة ممكنة؟.

فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة i المنطقة z
هي x_{ij} فإن الكميات المحتملة توجيهها من كل وحدة الى كل
منطقة هي حسب الجدول التالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الوحدة 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الوحدة 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

جدول 2-6

وهو جدول مشابه لجدول التكاليف، غير أن الفرق هو أن قيم
التكاليف من كل وحدة الى كل منطقة معلومة، غير أن في هذا الجدول
الكميات عبارة عن متغيرات مجهولة تبحث عنها إشكالية المسألة.

ثانياً: تحويل جدول مسائل النقل: إن العرض الإنشائي لمسألة النقل
حسب المثال الافتراضي السابق يمكن تلخيصه في جدول شامل هو
جدول مسألة النقل و يكون على النحو التالي:

	المنطقة 1	منطقة 2	منطقة 3	منطقة 4	العرض
الوحدة 1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1
الوحدة 2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2
الوحدة 3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3
المجموع	b_1	b_2	b_3	b_4	

جدول 3-6

إن هذا الجدول يلخص كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف
نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية الى كل منطقة في
أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة وهي القيم x_{ij} المراد
البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل
وحدة و كذا كميات الطلب لكل منطقة.

تسمى الوحدات الإنتاجية بالمنبع، كما تسمى المناطق المراد
تموينها بالمصب، و عليه فإن القيمة c_{ij} نقول عنها بأنها تكلفة
الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i الى المصب z و هي قيمة
غير سالبة. و x_{ij} هي الكميات المراد نقلها من المنبع i الى
المصب z وهي أيضا قيمة غير سالبة.

ثالثاً: السبغة الرياضية لمسألة النقل: من الجدول 3-6
تظهر لنا الكميات المراد نقلها من كل منبع الى كل مصب،

وكذا تكلفة الوحدة الواحدة من كل منبع الى كل مصب:
وعليه فإن:

- التكلفة الإجمالية التي تحملها المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث هي:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}$$

و اختصارا تكتب كما يلي:

$$Z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

- الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \quad \text{المنبع 1:}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \quad \text{المنبع 2:}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 \quad \text{المنبع 3:}$$

و اختصارا الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i$$

و يعني هذا أن الكميات المرسله من كل منبع الى مختلف المصبات يجب أن تساوي قدرة العرض لكل منبع.

- الكميات المطلوبة في كل مصب هي:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \quad \text{المصب 1:}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \quad \text{المصب 2:}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \quad \text{المصب 3:}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 \quad \text{المصب 4:}$$

و اختصارا الكميات المطلوبة في كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j$$

و يعني هذا أن الكميات المستقبله من طرف كل مصب من كل منبع يجب أن تساوي طلب كل مصب.

وبما أن الهدف هو تدنئة التكاليف في ظل هذه الشرط لذلك

فإن الصياغة الرياضية لمسألة النقل حسب الافتراض السابق تكون كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{Min: } Z &= \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij} \\ \text{ق} \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j \\ x_{ij} \geq 0 \\ c_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

و عموما تكون:

$$j=1,2,3,\dots,n$$

$$i=1,2,3,\dots,m$$

حيث: n عدد المصبات و m عدد المنابع.

مثال 6-1: تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن، بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة و هي:

- وحدة موزاية، تنتج قارورات المياه المسماة "موزاية" بطاقة قصوى هي 10. 55³ قارورة شهريا.

- وحدة سعيدة، تنتج قارورات المياه المسماة "سعيدة" بطاقة قصوى هي 10. 45³ قارورة شهريا.

- وحدة باتنة، تنتج قارورات المياه المسماة "باتنة" بطاقة قصوى هي 10. 20³ قارورة شهريا.

يتم التسويق في اتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـ 10. 30³ قارورة شهريا.

- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها بـ 10. 30³ قارورة شهريا.

- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـ 10. 40³ قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج الى كل مقر ناحية من النواحي هي بالدينار كما يلي:

منبع	مصب	الوسط	الشرق	الغرب
موزاية		1	4	5
سعيدة		5	7	3
باتنة		10	8	9

جدول 4-6

تبحث المؤسسة عن خطة لتمويل مختلف النواحي بمنتجاتها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: 1- إثبت أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل.

2- شكّل جدول المسألة.

الإجابة: السؤال 1:

1- هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجيهها من كل منبع الى كل مصب بغية تدنئة التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة و بالتالي فإنه توجد دالة هدف هي على الشكل التالي:

$$\text{Min: } Z = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

2- مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 55 + 45 + 20 = 120$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 50 + 40 + 30 = 120$$

يعني هذا أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.

كميات العرض و كميات الطلب غير سالبة.

و عليه يمكن القول بأن هذه المسألة تخضع لنوع مسائل النقل.

السؤال 2: يمكن إجمال معطيات المسألة في الجدول التالي:

منبع	الوسط	الشرق	الغرب	العرض 10 ³ ق
موزاية	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	55
سعيدة	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	45
باتنة	X ₃₁	X ₃₂	X ₃₃	20
الطلب 10 ³ ق	40	30	50	120

جدول 5-6

رابعاً: طرق حل مسائل النقل: تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين: الأولى هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول و تتم بعدة طرق منها، طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكلفة الدنيا، طريقة فوقل.

الثانية و هي مرحلة اختبار الحل و سيرورة تحسينه، و تتم بأحدى الطريقتين، الأولى تعرف بطريقة التخطي (Stepping-stone)، و الثانية تعرف بطريقة التوزيع المعدل (MODI).

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في الجدول الى الأعلى و الى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك بإتباع منهجية المثال التالي:

مثال 6-2: أوجد حل المثال 1-6 بطريقة الزاوية الشمالية الغربية- أسلوب التخطي.

الإجابة: يتم توزيع الكميات من مختلف المنابع الى مختلف المصبات كما يلي:

أ- نبدأ بأول خلية في الجدول و هي الخلية العلوية اليسرى "الشمالية الغربية"، المقابلة لمنبع 1 مصب 1، نجد أن إحتياجات المصب 1 هي 40 ألف وحدة، بينما حجم ما يعرضه المنبع 1 هو 55 ألف وحدة، لذلك فيمكن لهذا المصب أن يتحصل على كامل إحتياجاته المقدرة بـ 40 ألف وحدة من المنبع 1 ويتشبع بذلك العمود الأول كلياً، بينما يتبقى للمنبع 1 كمية تقدر بـ 15 ألف وحدة. (تابع التوزيع من خلال الجدول 6-6).

باقي	باقي	a_i	مصب 3	مصب 2	مصب 1
0	15	55	5	4	1
0	30	45	3	7	5
0		20	9	8	10
		120	50	30	40
			20	15	0
			0	0	

جدول 6-6

ب- نتقل الى الخلية الموالية و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 2، مقابلها نجد كمية عرض تقدر بـ 15 ألف وحدة و هي المقدار المتبقى بعد تسويق المنبع 1 لجزء من معروضه الى المصب 1، بينما إحتياجات المصب 2 تقدر بـ 30 ألف وحدة، لذلك فإن أقصى كمية يمكن توجيهها من المنبع 1 الى المصب 2 هي 15 ألف وحدة، وحينئذ تتبقى إحتياجات مقدارها 15 ألف وحدة ينبغي على المصب 2 أن يتحصل عليها من منبع آخر وهذا في الوقت الذي يستنفذ فيه المنبع 1 كل الكميات التي كان يعرضها.

ج- نتقل الى خلية أخرى، الخلية 1، 3 لا يمكن الإنتقال إليها لأنه لا يوجد للمنبع 1 ما يسوقه، الخلية 2، 1 لا يمكن الإنتقال إليها لأن المصب 1 ليت كل إحتياجاته، و الخلية المرشحة الآن هي الخلية المقابلة للمنبع 2 و المصب 2، حيث أن طاقة العرض هي 45 ألف وحدة، بينما الطلب غير الملقى لحد الآن، للمصب 2 هو 15 ألف

وحدة و هي كمية يمكن تلبينها من المنبع 2 و يتبقى له بعد ذلك 30 ألف وحدة، و ينشعب المصب 2 كلية.

د- نتقل بعد ذلك الى الخلية الموالية و هي المقابلة للمنبع 3 والمصب 3، حيث قيمة العرض المتبقي هي 30 ألف وحدة ينسب قيمة الطلب هي 50 ألف وحدة، لذلك فأكبر كمية يمكن الحصول عليها من المنبع 2 هي 30 ألف وحدة و يتبقى فيما طلب مقدارها 20 ألف وحدة، في حين يكون المنبع 2 قد سرق كل ما كان يعرضه.

هـ- نتقل الى الخلية 1،3 حيث لا يمكن للمصب 3 أن يسرق اليها لأن إحتياجاتها لبيت كلية، الخلية 2،3 أيضا لا يمكن للمنبع 3 أن يسوق اليها شيئا لأن إحتياجاتها لبيت كلية، و يتبقى بالنالي الخلية المقابلة للمنبع 3 و للمصب 3، حيث أن الكميات المعروضة هي 20 ألف وحدة بينما كميات الطلب المتبقى للمصب 3 هي أيضا 20 ألف وحدة، و بذلك يتم تلبية كل إحتياجات المصب 3 و في نفس الوقت يتم تسويق كل عرض المنبع 3.

و تكون كل الكميات المعروضة للمؤسسة قد سوقت، و لينت كل إحتياجات الجهات الثلاث.

ونحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول هو الجدول 7-6.

و فيه نجد:

$x_{11}=40$: و تعني أن منبع 1 (موزاية) يمون ناحية الوسط بـ 40 ألف وحدة شهريا.

$x_{12}=15$: و تعني أن منبع 1 (موزاية) يمون ناحية الشرق بـ 15 ألف وحدة شهريا.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

جدول 7-6

$x_{22}=15$: و تعني أن منبع 2 (سعيدة) يمون ناحية الشرق بـ 15 ألف وحدة شهريا.

$x_{23}=30$: و تعني أن منبع 2 (سعيدة) يمون ناحية الغرب بـ 30 ألف وحدة شهريا.

$x_{33}=20$: و تعني أن منبع 3 (باتنة) يمون ناحية الغرب بـ 20 ألف وحدة شهريا.

و بقية المتغيرات قيمها معلومة أي: $x_{13}=x_{21}=x_{31}=x_{32}=0$

أما التكلفة التي تتحملها المؤسسة فهي:

$$Z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij} = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 7 \times 15 + 3 \times 30 + 9 \times 20 = 475 \text{ ونقدية}$$

و تجدر الإشارة الى أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هو:

$$m+n-1$$

حيث: m عدد المنابع (الأسطر)، n عدد المصببات (الأعمدة).

و هي القاعدة الأساسية التي ينبغي توفرها لأجل سيورة إيجاد الحل الأمثل.

و بالنظر الى مثالنا فإن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يجب أن

$$\text{تساوي: } 5-1-3+3=4$$

و هو بالفعل عدد المتغيرات الداخلة في الحل كما يعرضها الجدول 6-7.

2- ضرورة العمل الأمثل: إن الحل المتوصل إليه هو أول حل أساسي، لكننا لا نعلم إذا كان حلاً أمثلاً أم هو غير أمثل. لمعرفة ذلك فإن هناك طريقتين مستعملين كما أشير إلى ذلك من قبل، الأولى هي طريقة التخطي (Stepping-stone)، أما الثانية فهي معروفة بطريقة التوزيع المعدل (MODI).

أ- طريقة التخطي (Stepping-stone): فكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير الداخلة في الحل والتي من شأنها أن تدني التكلفة الكلية في حالة إدخالها إلى الحل الأساسي، لذا ينبغي اختبار الخلايا غير الداخلة في الحل إذا ما كان إمرار أي وحدة عبرها يؤدي إلى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما نصلح عليه بالتكاليف الجديدة (تكاليف الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل وذلك كما في منهجية حل المثال السابق على النحو التالي:

- الخلية (3,1): هي خلية غير داخلة في الحل، إذا أمرنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى إختلال شروط توازن المسألة ومنها $\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i$ على مستوى السطر الأول، و $\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j$ على مستوى العمود الثالث، لأن مجموع السطر الأول يصبح 51، لذلك ينبغي طرح القيمة 1 من الخلية (3,2)، غير أن طرح هذه القيمة أيضاً يحدث إختلالاً على مستوى السطر الثاني لأن المجموع يصبح 44 بدلاً

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	40	15	5	55
منبع 2	5	15	30	45
منبع 3	10	8	20	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-8

من 45، لذلك نضيف القيمة 1 إلى الخلية (2,2)، غير أن ذلك أيضاً يحدث إختلالاً على مستوى العمود 2 فيصبح مجموعه 31 بدلاً من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة 1 من الخلية (2,1)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، و الخلاصة أننا نضيف و نطرح المقدار 1 على مدار إتجاه المسار كما هو واضح في الجدول 6-8.

إذا رمزنا لتكلفة الوحدة المنقولة من المنبع i إلى المصب j بـ σ_{ij} فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 1 إلى المصب 3 هي:

$$\sigma_{13} = 5 \times (1) + 3 \times (-1) + 7 \times (1) + 4 \times (-1) = 5$$

و يعني أن هذه الخلية لو تدخل في الحل الأساسي فإن كل وحدة منقولة من المنبع 1 إلى المصب 3 سترفع التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية، فإذا تم نقل 10 وحدات مثلاً من المنبع 1 إلى المصب 3 فإن ذلك سيرفع التكلفة الإجمالية بمقدار 50 وحدة نقدية، و عليه فإن هذه الخلية ينبغي تجنبها.

- الخلية (1,2): هي خلية غير داخلية في الأساس، إذا

جدول 9-6

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

أمرنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي أيضا إلى إختلال شروط توازن المسألة على مستوى السطر الثاني، وعلى مستوى العمود الأول، لأن مجموع السطر الثاني يصبح 46 و مجموع

العمود الأول يصبح 41، لذلك ينبغي طرح القيمة 1- من الخلية (1,1)، غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث إختلالا على مستوى السطر الأول لأن المجموع يصبح 54 بدلا من 55، لذلك نضيف القيمة 1 الى الخلية (2,1)، غير أن ذلك أيضا يحدث إختلالا على مستوى العمود 2 فيصبح مجموعه 31 بدلا من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة 1 من الخلية (2,2)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، والخلاصة هي أيضا أننا نضيف ونطرح المقدار 1 على مدار اتجاه المسار كما هو واضح في الجدول 9-6.

و عليه تصبح تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 2 الى المصب 1 هي:

$$\sigma_{21} = 5 \times (1) + 1 \times (-1) + 4 \times (1) + 7 \times (-1) = 1$$

و يعني هذا أيضا أن كل وحدة منقولة من المنبع 2 الى المصب 1 ستزيد التكلفة بوحدة نقدية واحدة، فإمرار 10 وحدات مثلا ستزيد التكلفة بـ 10 وحدات نقدية (10×1).

و بالمثل يتم حساب التكاليف الحدية للخلايا الأخرى.

- الخلية (1,3): بالمثل يتم إيجاد المسار بالنسبة لهذه الخلية،

جدول 10-6

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

و ينبغي أيضا الحفاظ

على التوازن سطريا

وعموديا، ويلاحظ أن

المسار هنا أطول، و

هذا ما تطلبه شرط

الحفاظ على التوازن.

لاحظ أنه عندما

أضفنا الكمية

1 في الخلية

(1,3)، لم نقوم بطرحها من الخلية (1,2) للحفاظ على التوازن، لأن هذا يجعل x_{21} سالب و هو ما يتعارض مع شروط مسائل النقل التي يفترض فيها أن المتغيرات لا تأخذ قيما سالبة، و هذا ما جعلنا نطرح القيمة 1 من الخلية (1,1)، وبالمثل بالنسبة للبقية، نضيف و نطرح مع الحفاظ على التوازن أفقيا و عموديا مع الحرص على عدم سلبية المتغيرات. و عليه فإن التكلفة الحدية لهذا المسار هي:

$$\sigma_{31} = 10 \times (1) + 1 \times (-1) + 4 \times (1) + 7 \times (-1) + 3 \times (1) + 9 \times (-1) = 0$$

و يعني هذا أن هذه الخلية لا تؤثر على التكلفة في حالة إدخالها الى الأساس، إذ أنها لا تنقص منها ولا تزيد فيها.

الخلية (2,3): بنفس الطريقة تماماً نجد أن التكلفة الحدية للمسار المتولد عن هذه الخلية هو:

جدول 6-11

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

$\sigma_{32} = 8 - 7 + 3 - 9 = -5$ ويعني هذا أن نقل كل وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 يؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية بـ 5 وحدات نقدية، فنقل 15 وحدة مثلاً من المنبع 3 إلى المصب 2 سيؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية بـ 75 وحدة نقدية،

أي أن التكلفة الإجمالية تصبح 400 بدلاً من 475 وحدة نقدية.

بإجمال التكاليف الحدية المحصل عليها وهي:

$\sigma_{32} = -5$	$\sigma_{31} = 0$	$\sigma_{21} = 1$	$\sigma_{13} = 5$
--------------------	-------------------	-------------------	-------------------

نجد أن الخلية التي تعطي تخفيضاً للتكلفة الإجمالية هي (2,3)، لذلك نقول أن الحل الأساسي الأول هو غير أمثل، وعموماً نقول أن الحل غير أمثل إذا كانت إحدى أو بعض التكاليف الحدية سالبة، والخلية المرشحة للدخول إلى الأساس هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة.

وعليه فالحل الأساسي الأول يتطلب الأمر تحسينه بإدخال الخلية (2,3) إلى الأساس، فكيف يتم ذلك؟.

يتم ذلك بإحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا السالبة (الزوايا التي تم طرح القيمة 1 منها)، وهذا لتجنب إحداث قيم سالبة لبعض المتغيرات. في مثالنا القيم

المتواجدة في الزوايا السالبة هي: $x_{21} = 15$ و $x_{33} = 20$

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-12

لذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_{21} حيث يجب أن تتحول إلى قيمة معدومة بإحداث التغيير كما في الجدول 6-12 جواره.

بإجراء عملية الجمع في الخلايا التي حصل فيها تغيير نحصل على جدول الحل الأساسي الثاني كما هو واضح في الجدول 6-13. ويصبح مخطط التوزيع الجديد كما يلي:

- $x_{11} = 40$: أي أن المنبع الأول يمدون المصب الأول بـ 40 ألف وحدة.

- $x_{12} = 15$: أي أن المنبع الأول يمدون المصب الثاني بـ 15 ألف وحدة.

- $x_{23} = 45$: أي أن المنبع الثاني يمدون المصب الثالث بـ 45 ألف وحدة.

- $x_{32} = 15$: أي أن المنبع الثالث يمدون المصب الثاني بـ 15 ألف وحدة.

- $x_{33}=5$: أي أن المنبع الثالث يمدون المصب الثالث بـ 5 آلاف وحدة.
أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-13

بما أننا وجدنا التكلفة الحدية للخلية التي دخلت الحل هي $\sigma_{32} = -5$ لذلك فإن التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة وفق المخطط الجديد سوف تنخفض بمقدار $15 \times \sigma_{32}$ أي بمقدار 75 ألف وحدة نقدية. و عليه فعند حساب تكلفة النقل الإجمالية يجب أن نردها تساوي 400 وحدة نقدية لأن التكلفة في الحل الأساسي الأول هي 475 ألف وحدة نقدية. ولنرى إذا كان هذا صحيحا:

$$Z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij} = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 5 \times 9 = 400$$

و عليه فإن التكلفة الجديدة تساوي بالفعل 400 ألف وحدة نقدية. و علينا أن نختبر من جديد الحل المتوصل إليه إذا كان أمثليا، لا زال قابلا للتحسين و هذا بإستعمال نفس الطريقة السابقة

جدول 6-14

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1	4	5	55
منبع 2	5	7	3	45
منبع 3	10	8	9	20
b_j	40	30	50	120

أي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا الفارغة و التي تظهر مساراتها في الجدول 6-14 أعلاه، أما قيم التكاليف الحدية فهي:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6 \\ \sigma_{13} &= 5 - 9 + 8 - 4 = 0 \\ \sigma_{31} &= 10 - 1 + 4 - 8 = 5 \\ \sigma_{22} &= 7 - 3 + 9 - 8 = 5 \end{aligned}$$

بما أن كل التكاليف الحدية σ_{ij} أصبحت غير سالبة لذلك نقول أن جدول الحل الأساسي الثاني هو جدول الحل الأمثل، و عليه فإن خطة النقل التي يجب على المؤسسة أن تطبقها هي التالية:

أ- وحدة موزاية تمون:

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 60 ألف دينار.

ب- وحدة سعيدة تمون:

- منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج- وحدة باتنة تمون:

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.

- منطقة الغرب بـ 5 آلاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.

بج- طريقة التوزيع المعدل (MODI): نهاية فكرة هذه الطريقة هي نفسها نهاية فكرة طريقة التخطيطي، غير أن الاختلاف في المنهجية، إذ أن هذه الطريقة تفترض وجود مجهولين هما V_j ويعبر عن الأعمدة و U_i ويعبر عن الصفوف، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا، أي إذا كانت تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنبع i إلى المصب j هي c_{ij} فيجب أن يكون:

$$U_i + V_j = c_{ij}$$

حيث i يرمز للصف الذي توجد فيه الخلية، و j يرمز للعمود الذي توجد فيه الخلية. وهذا بالنسبة لكل الخلايا الداخلة في الحل. ثم يتم إيجاد المجاهيل U_i و V_j وهذه هي الخطوة الأولى، تليها الخطوة الثانية وهي إيجاد التكاليف الحديثة للخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي، وذلك عن طريق المعادلة:

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$$

وهنا يبدأ التشابه مع الطريقة الأولى إذ أن القيم σ_{ij} التي نحصل عليها مساوية تماماً لتلك التي نحصل عليها بطريقة التخطيطي، وتكون الخلايا ذات الإمتياز والتي من شأنها أن تدخل الحل والتي تحسن من التكلفة هي التي تأخذ تكلفتها الحديثة أقل قيمة في الاتجاه السالب، وحينها يتم تحديد المسار وإجراء التغييرات تماماً كما في الطريقة الأولى، و سنحاول أن نشرح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: 3-6. يتابع أسلوب التوزيع المعدل أوجد الحل الأمثل لمسألة التمرين 1-6 وذلك بإعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية. إن طريقة الزاوية الشمالية الغربية المطبقة على المثال أعطينا جدول الحل الأساسي الأول رقم 6-6. والذي يصبح كما يلي:

		المصب			a _i
		V ₁	V ₂	V ₃	
U ₁	منبع 1	40	15	5	55
U ₂	منبع 2	5	15	30	45
U ₃	منبع 3	10	8	20	20
	b _j	40	30	50	120

جدول 6-15

- بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل: لدينا $U_i + V_j = c_{ij}$ ، من خلالها نوجد المجاهيل U_i و V_j من خلال المعادلات التالية، مع فرض أن U_1 لأول معادلة قيمتها صفر وهذا لتسهيل الحل:

$$U_1 + V_1 = 1 \Rightarrow V_1 = 1 \quad \text{الخلية (1,1):}$$

$$U_1 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4 \quad \text{الخلية (2,1):}$$

$$U_2 + V_2 = 7 \Rightarrow U_2 + 4 = 7 \Rightarrow U_2 = 3 \quad \text{الخلية (2,2):}$$

$$U_2 + V_3 = 3 \Rightarrow 3 + V_3 = 3 \Rightarrow V_3 = 0 \quad \text{الخلية (3,2):}$$

$$U_3 + V_3 = 9 \Rightarrow U_3 + 0 = 9 \Rightarrow U_3 = 9 \quad \text{الخلية (3,3):}$$

- بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل: وهي الخطوة الثانية، يتعين تقييم هذه الخلايا من خلال إيجاد التكاليف الحديثة لكن بطريقة مختلفة عن طريقة التخطيطي، وذلك عن طريق المعادلة $\sigma_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$ ، والتي نحصل من خلالها على الجدول التالي:

الخلية	$\sigma_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$	σ_{ij}
U_1, V_3	$5 - 0 - 0 = 5$	5
U_2, V_1	$5 - 3 - 1 = 1$	1
U_3, V_1	$10 - 9 - 1 = 0$	0
U_3, V_2	$8 - 9 - 4 = -5$	-5

جدول 6-16

يظهر في العمود الأخير أن التكاليف الحدية مساوية تماما لتلك المحصل عليها بطريقة التخطي. و يظهر أن الحل غير أمثل لأن الخلية (2,3) سوف تؤدي الى تحسين التكلفة بمقدار 5 وحدات نقدية لكل وحدة تنقل عبرها أي من المنبع 3 الى المصب 2. و عليه يتم تحديد المسار وإجراء التحويلات بنفس الطريقة المشروحة ونحصل على الجدول 6-17 و هو مشابه تماما للجدول رقم 6-13.

	1مصب	2مصب	3مصب	a_i
1منبع	<div>1</div> <div>40</div>	<div>4</div> <div>15</div>	<div>5</div> <div></div>	55
2منبع	<div>5</div> <div></div>	<div>7</div> <div></div>	<div>3</div> <div>45</div>	45
3منبع	<div>10</div> <div></div>	<div>8</div> <div>15</div>	<div>9</div> <div>5</div>	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-17

من جديد نختار الحل إذا كان أمثلا أم لا، و هذا بنفس المنهجية السابقة، حيث نفرض أيضا أن $U_1=0$ ، و نحصل على النتائج:

$$\begin{aligned} U_1+V_1=1 &\Rightarrow V_1=1 \\ U_1+V_2=4 &\Rightarrow V_2=4 \\ U_3+V_2=8 &\Rightarrow U_3+4=8 \Rightarrow U_3=4 \\ U_3+V_3=9 &\Rightarrow 4+V_3=9 \Rightarrow V_3=5 \\ U_2+V_3=3 &\Rightarrow U_2+5=3 \Rightarrow U_2=-2 \end{aligned}$$

و في الخطوة الموالية نشكل جدول التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل و هو ما يظهره الجدول رقم 6-18 أدناه.

الخلية	$c_{ij}-U_i-V_j$	σ_{ij}
U_1, V_3	$5-0-5=0$	0
U_2, V_1	$5-(-2)-1=6$	6
U_2, V_2	$7-(-2)-4=5$	5
U_3, V_1	$10-4-1=5$	5

جدول 6-18

بما أن كل قيم σ_{ij} غير سالبة، لذلك فإن الجدول 6-17 هو جدول الحل الأمثل، ويتم شرحه تماما كما تم ذلك عند شرح جدول الحل الأمثل المحصل عليه بطريقة التخطي في الصفحة 95.

3- طريقة التكلفة الحدية: تختلف هذه الطريقة عن الطريقة الأولى في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في تشبيع الخلايا إنطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم إستفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلية في الحل يساوي $m+n-1$. ثم يتم بعد ذلك إختيار ما إذا كان الحل أمثلا أم لا بنفس طريقة سيرورة الحل كما عرضت في طريقة الراوية الشمالية الغربية (طريقتي، التخطي أو التوزيع المعدل). ويتم توضيح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال 6-4: أوجد الحل الأمثل لمسألة المثال 6-1 باستعمال طريقة التكلفة الدنيا في إيجاد الحل الأساسي الأول و طريقة التخطي في سيرورة الحل. إنطلاقا من الجدول رقم 6-5 للمثال المشار إليه، نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

- نبدأ الحل بالبحث عن أقل تكلفة في الجدول. أقل تكلفة هي 1 في الخلية (1,1)، العرض هو 55 ألف وحدة و الطلب هو 40 ألف وحدة، نشبع هذه الخلية بالقيمة 40 ألف و هي أقصى ما يمكن نقله الى المصب 1، أي أن المنبع 1 يلبي كل

إحتياجات المصب 1 البالغة 40 ألف وحدة ويتبقى لهذا المنبع عرض مقداره 15 ألف وحدة.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 3 و هي المقابلة للمنبع 2 و المصب 3، لذلك يتم تشيع الخلية (3،2)، حيث العرض هو 45 ألف بينما الطلب هو 50 ألف لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 45 ألف، يسوق المنبع 2 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 3 قيمة 5 آلاف وحدة على تلبية كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي 4 و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 2، لذلك يتم تشيع الخلية (2،1)، حيث العرض المتبقي هو 15 ألف وحدة بينما الطلب هو 30 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، و بذلك يسوق المنبع 1 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 2 قيمة 15 ألف وحدة لم تلبى بعد.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	باقي	باقي
منبع 1	40	15	5	55	15	0
منبع 2	5	7	45	45	0	
منبع 3	10	8	5	20	5	0
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	5			
باقي		0	0			

جدول 6-19

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي 5 في الخلية (3،1)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع 1 يسوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية الأخرى هي أيضا 5 في الخلية (1،2)، غير أن صف و عمود هذه الخلية معا مشبعان.

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي 7 في الخلية (2،2)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع 2 يسوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي 8 و هي المقابلة للمنبع 3 و المصب 2، لذلك يتم تشيع الخلية (2،3)، حيث العرض هو 20 ألف وحدة و الطلب المتبقى هو 15 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، وبذلك يتبقى للمنبع 3 قيمة 5 آلاف وحدة غير مسوقة، بينما يحصل المصب 2 على كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية هي 9 و هي المقابلة للخلية (3،3)، حيث العرض هو 5 آلاف وحدة و الطلب أيضا هو 5 آلاف وحدة، لذلك يتم تشيع سطر و عمود هذه الخلية في آن واحد.

و يتم بذلك تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كل الإحتياجات المطلوبة. و نلاحظ أننا حصلنا على عدد من المتغيرات الداخلية الى الحل مساو الى $m+n-1$ وفي نفس الوقت حافظنا على توازن الجدول.

ونحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا و هو:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	40	15	5	55
منبع 2	5	7	45	45
منبع 3	10	8	5	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-20

سيرورة العمل الأمثل: سيرورة الحل تتم تماماً كما جرت في حالة طريقة الزاوية الشمالية الغربية- طريقة التخطيطي، حيث يتم إيجاد التكاليف الحدية، في حالة ما إذا كانت جميع التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة أكبر أو تساوي الصفر نكون قد توصلنا الى خطة الحل الأمثل، و في الحالة المعاكسة ندخل الى الحل الخلايا التي تأخذ أقل قيمة في الاتجاه السالب ثم نجري التحويلات اللازمة كما تم شرح ذلك في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

و نلاحظ أن جدول الحل الأساسي الأول المتوصل إليه هو نفسه جدول الحل الأساسي الأمثل المتوصل إليه في طريقة الزاوية الشمالية الغربية (جدول 6-13)، حيث أن كل التكاليف الحدية المحسوبة غير سالبة، وهي:

$$\sigma_{13}=5-9+8-4=0$$

$$\sigma_{21}=5-1+4-8+9-3=6$$

$$\sigma_{22}=7-3+9-8=5$$

$$\sigma_{31}=10-1+4-8=5$$

و يتم شرح الجدول أيضاً بنفس الطريقة.

تجدر الإشارة الى أنه أثناء البحث عن الحل الأساسي الأول وفي حالة تساوي تكلفتين نعطي الأولوية للتي تكون مرفقة بأكبر كمية لكونها تؤدي الى تكلفة إجمالية أقل.

ميزة طريقة التكلفة الدنيا أنها تقربنا أكثر الى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي تخضع للحظ.

4- طريقة فوقل: وتسمى أيضاً طريقة الجزاء ، في هذه الطريقة يتم إيجاد الحل الأساسي الأول بإتباع المنهجية التالية:

1- نوجد الفرق بين أدنى تكلفة و التكلفة المولية لها من حيث الصغر، وهذا سطرنا و عمودنا. تسمى هذه الفروقات بأرقام فوقل.

2- نبحث عن أكبر رقم من أرقام فوقل المحسوبة في الخطوة الأولى على مستوى الأسطر و الأعمدة، ثم نبحث عن أقل تكلفة مقابلة له في السطر أو العمود الذي ينتمي إليه هذا الرقم و ندخل الخلية التي تنتمي إليها الأقل تكلفة الى الحل، ليتشبع إما السطر أو العمود حسب المعطيات.

3- نعود من جديد الى الخطوة الأولى مع تقادي إعادة إيجاد الفروقات بالنسبة للأسطر أو الأعمدة المشبعة، و هذا حتى تصريف كل المعروض و تلبية كل الطلب. و نكون بذلك قد حصلنا على جدول الحل الأساسي الأول.

4- بعد إيجاد الحل الأساسي الأول نتبع نفس خوارزمية سيرورة الحل كما تم عرضها في طريقة الزاوية الشمالية الغربية بإحدى الطريقتين إما طريقة التخطيطي أو طريقة التوزيع المعدل..

ملاحظة:

1- في حالة وجود قيمتين عظيمتين من أرقام فوقل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنويتين ، و نختار أقل تكلفة مقابلة ونشبع الخلية التي تنتمي إليها، وفي حالة ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضاً متساويتين نختار أحدهما لاعلى التعمين.

2- عند حساب أرقام فوقل فإنه في حالة وجود تكلفتين دنيويتين متساويتين فإننا نحسب أيضاً الفرق بينهما و هو صفر.

مثال 5-6: أوجد الحل الأمثل لمسألة المثال 1-6 باستخدام طريقة فوقل-أسلوب التخطيط.

إنطلاقاً من جدول المسألة رقم 5-6 نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

الفروقات الأولى:

- الصف الأول: أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 4 الفرق بينهما هو 3.

- الصف الثاني: أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 2.

- الصف الثالث: أقل تكلفة هي 8 و التي تليها هي 9 الفرق بينهما هو 1.

- العمود الأول: أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 4.

- العمود الثاني: أقل تكلفة هي 4 و التي تليها هي 7 الفرق بينهما هو 3.

- العمود الثالث: أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 2.

تسجل هذه الفروقات في الجدول (6-21)، أي في خانات الفرق 1 سطريا و عموديا.

أكبر قيمة في الفرق 1 سطريا و عموديا هي 4 موجودة في العمود الأول، و عليه نبدأ بتشبيع الخلية المقابلة لأقل تكلفة وهي الخلية (1،1)، حيث أن العرض هو 55 والطلب 40، لذلك فأقصى قيمة يمكن إعطاؤها لهذه الخلية هي 40، ويشبع بذلك العمود الأول، بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 بالنسبة للمنع 1.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	فرق 1	فرق 2	فرق 3	فرق 4
منع 1	40	15	5	55	3	1	1	
منع 2	5	7	3	45	2	4	1	
منع 3	10	8	9	20	1	1		1
bj	40	30	50	120				
فرق 1	4	3	2					
فرق 2		3	2					
فرق 3		4	4					

جدول 6-21

الفرق 1: هو الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها على مستوى الأعمدة.
الفرق 2: هو الفرق بين أقل تكلفة و التكلفة التي تليها على مستوى الأسطر. تظهر فروقات التكاليف بأرقام صغيرة.

نعود من جديد و نحسب الفروقات 2، مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة و الأسطر و الأعمدة المشبعة.
الفروقات الثانية:

نعود من جديد بنفس المنهجية السابقة، نحسب أرقام فوقل وندونها في عمود أو سطر الفرق 2 كما يظهر في الجدول أعلاه، دون الأخذ بعين الاعتبار العمود الذي تشيع، حيث نجد أن أكبر رقم من أرقام فوقل هو 4 على مستوى السطر 2، وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (3،2)، بما أن الكميات المعروضة عندها هي 45 و المطلوبة هي 50، لذلك نوجه لها الكمية 45 و يشبع بذلك السطر الثاني و يبقى احتياج مقداره 5 للعمود الثالث.

الفروقات الثالثة:

نحسب من جديد أرقام فوقل، و نجد أكبر رقم هو 4 على مستوى العمودين 2 و 3، غير أننا نختار العمود الثاني لاحتضانه أقل تكلفة، حيث المعروض المتبقي هو 15 و المطلوب هو 30، لذلك نوجه الكمية 15 و يشبع بذلك السطر الأول و يبقى المقدار 15 إحتياج في العمود الثاني.

الفروقات الرابعة:

يبقى فرق وحيد ومقداره 1 على مستوى السطر الثالث، حيث أقل تكلفة تقابله هي 8، لذلك يوجه للخلية (2,3) ما مقداره 15 و يبقى عرض مقداره 5، يوجه في المرحلة الموالية للخلية (3,3).

و يظهر الحل الأساسي الأول بطريقة فوقل كما هو واضح في الجدول 6-22 أدناه.

و واضح أن عدد الخلايا الداخلة في الحل تساوي الى $m+n-1$ و هو 5.

	مب1	مب2	مب3	ai
سب1	40	15	5	55
سب2	5	7	3	45
سب3	10	8	9	30
bj	40	30	50	120

جدول 6-22

و يبقى أن نختار الآن إذا ما كان الحل أمثلا أو هو قابل للتحسين و ذلك عن طريق التكاليف الحدية كما جرى شرحها في سيرة الحل في طريقة الزاوية الشمالية الغربية. وعليه تكون التكاليف الحدية كما يلي:

$$\sigma_{31}=5-9+8-4=0$$

$$\sigma_{21}=5-3+9-8+4-1=6$$

$$\sigma_{22}=7-3+9-8=5$$

$$\sigma_{33}=10-8+4-1=5$$

يلاحظ أن كل التكاليف الحدية غير سالبة وبالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل لكنه ليس وحيد و تفسيره كما يلي:

أ- وحدة موزاية قمون:

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 60 ألف دينار.

ب- وحدة سعيدة قمون:

- منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج- وحدة باتنة قمون :

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.

- منطقة الغرب بـ 5 آلاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.

غير أن هذا الحل ليس وحيدا إذ بإمكاننا أن نجد حلا أمثلا آخر بنفس التكلفة الإجمالية ما دام أن التكلفة الحدية للخلية (3,1) تساوي الى الصفر، بمعنى أنه يمكن إدخالها الى الحل الأمثل دون أن يحدث أي تغيير على التكلفة الإجمالية، وبإيجاد المسار و إجراء التحويلات نجد الحل الثاني الذي يظهره الجدول 6-23 أدناه.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	ai
سج 1	40	15	5	55
سج 2	5	7	3	45
سج 3	10	8	9	30
	15	5		
bj	40	30	50	120

جدول 6-23

حيث يعطي نفس التكاليف الإجمالية الدنيا و هي 400 ألف دينار.

تلخيص خوارزمية الحل.

- 1- بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث :
 - تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع الى كل مصب.
 - كميات عرض كل منبع، و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب.
 - نوجد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق، الزاوية الشمالية الغربية أو التكلفة الدنيا أو فوقل.
 - يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط: $M+N-1$
 - نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا إما بطريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل.
 - نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل $\sigma_{ij} \geq 0$.
 - إذا كان الحل غير أمثل نحسنه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة.
 - إذا كان الحل أمثلا نتوقف ونشرحه.

خامسا: حالات خاصة في مسائل النقل: من الحالات الشائعة التي يمكن مصادفتها في مسائل النقل عدم تساوي العرض مع الطلب، و حالة التفكك.

1- عدم تساوي العرض مع الطلب: إن إيجاد الحل الأساسي الأول، و إيجاد الحل الأمثل يتطلبا أساسيا و هو تساوي العرض مع الطلب، أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو الطلب أكبر من العرض، و في هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا، و ذلك كما يلي:

- حالة العرض أقل من الطلب، أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

ينبغي إضافة منبع (سطر) خيالي الى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، و تكاليف النقل من هذا المنبع الى أي مصب نفترضها معدومة.

- حالة العرض أكبر من الطلب، أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

ينبغي إضافة مصب (عمود) خيالي الى جدول المسألة، و تكاليف النقل من أي منبع الى هذا المصب نفترضها معدومة.

في الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول ثم الحل الأمثل بصفة عادية، ثم نحذف في النهاية السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

2- حالة التفكك: ونعني بها أن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أساسي لا تساوي: $m+n-1$ و هو شرط أساسي لإيجاد مسارات اختبار الحل، وللتخلص من هذا المشكل أيضا نلجأ الى التحايل، وذلك بوضع خلية تصورية - أو أكثر حسب الحالة- داخلية في الحل نفترض قيمتها تساوي ϵ ، أي قيمة بجوار الصفر، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأمثل، ونهملها تماما في النهاية باعتبارها قيمة مساعدة فقط، ويتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأساسي الأول أو في جداول الحل الموالية.

مثال 6-6: مؤسسة لها ثلاثة مصانع متجانسة الإنتاج، مكلفة بتموين ثلاثة مخازن في جهات متباعدة، إذا علمت أن كميات عرض كل مصنع وطاقات إستقبال كل مخزن، و تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار من كل مصنع الى كل مخزن معروضة في الجدول أدناه:

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	1	2	3	60
(2)	5	6	7	20
(3)	9	8	4	30
b_j	50	50	30	130

جدول 25-6

المطلوب: أوجد أفضل خطة للنقل بطريقة التكلفة الدنيا وأسلوب التوزيع المعدل.

يلاحظ أن مجموع العرض هو: 110، ومجموع الطلب هو: 130، أي أننا أمام حالة عدم تساوي العرض مع الطلب، والفارق بينهما هو 20 وحدة. لذلك تتم إضافة منبع خيالي (سطر) بعرض قيمته 20، و بتكاليف نقل صفرية، ونحصل بذلك على الجدول 26-6.

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	1	2	3	60
(2)	5	6	7	20
(3)	9	8	4	30
خيالي (4)	0	0	0	20
b_j	50	50	30	130

جدول 26-6

باستخدام طريقة التكلفة الدنيا نحصل على جدول الحل الأساسي 27-6 والذي تظهر فيه مختلف مراحل إيجادته.

ولعل ما يلفت الإنتباه و يجب التوقف عنده، هو أنه عند وصولنا الى تشبيع الخلية (3,3) التي تنتمي إليها التكلفة 4، نجد أن السطر و العمود يتشبعان في آن واحد، قبل نفاذ كل العرض و تلبية كل الطلب، و هي الحالة التي تحيلنا على حل متفكك، لذلك يتم تجنب هذه الحالة بتشبيع إما السطر فقط أو العمود فقط، و في مثالنا افترضنا بقاء قيمة صغيرة جدا بجوار الصفر كعرض للمنع 3، ويتم التعامل معها وكأنها قيمة عادية موجبة، و هذا حتى يكون عدد الخلايا

الداخلية في الحل يساوي $m+n-1$ أي 6. ويلاحظ أنه لو لم نلجأ إلى هذه الخيلة لوجدنا الحل متفكك أي $m+n-1$ يساوي 5 وليس 6.

	(1)	(2)	(3)	a_i	بقي	بقي
(1)	50	10	3	60	10	0
(2)	5	20	7	20	0	
(3)	9	8	4	30	ε	0
(4)	0	0	0	20	0	
b_j	50	50	30	130		
بقي	0	30	0			
بقي		20				
بقي		0				

جدول 27-6

وعليه فإن الحل الأساسي الأول يظهر في الجدول 28-6 و هو يتضمن سطر خيالي و قيمة افتراضية في الخلية (2,3).
و الآن نختبر الحل إذا كان أمثلاً أم هو قابل للتحسين بأسلوب التوزيع المعدل كما هو مطلوب.

- إيجاد: $U_i + V_j = C_{ij}$ للخلايا المملوءة:

بافتراض: $U_1 = 0$ نجد:

$$\begin{aligned} U_1 + V_1 = 1 &\Rightarrow V_1 = 1 \\ U_1 + V_2 = 2 &\Rightarrow V_2 = 2 \\ U_2 + V_2 = 6 &\Rightarrow U_2 = 4 \\ U_3 + V_2 = 8 &\Rightarrow U_3 = 6 \\ U_3 + V_3 = 4 &\Rightarrow V_3 = -2 \\ U_4 + V_2 = 0 &\Rightarrow U_4 = -2 \end{aligned}$$

- إيجاد: $\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ للخلايا الفارغة:

$$\begin{aligned} \delta_{31} &= 9 - U_3 - V_1 = 9 - 6 - 1 = 2 \\ \delta_{41} &= 0 - U_4 - V_1 = 0 + 2 - 1 = 1 \\ \delta_{43} &= 0 - U_4 - V_3 = 0 + 2 + 2 = 4 \\ \delta_{13} &= 3 - U_1 - V_3 = 3 - 0 + 2 = 5 \\ \delta_{21} &= 5 - U_2 - V_1 = 5 - 4 - 1 = 0 \\ \delta_{23} &= 7 - U_2 - V_3 = 7 - 4 + 2 = 5 \end{aligned}$$

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	50	10	3	60
(2)	5	20	7	20
(3)	9	ε	4	30
خيالي	0	0	0	20
b_j	50	50	30	130

جدول 28-6

بما أن كل التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة غير سالبة لذلك فإن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل لكنه غير وحيد لكون أن التكلفة الحدية للخلية (1,2) تساوي الصفر، و يكون جدول الحل الأمثل هو:

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	50	10	3	60
(2)	5	20	7	20
(3)	9	8	4	30
b_j	50	50	30	

جدول 29-6

و يلاحظ أننا أهملنا سطر المنبع الخيالي و القيمة ε على اعتبار أنهما مساعدان فقط، و تكون التكلفة الدنيا التي تتحملها المؤسسة هي :

$$Z=50+20+120+120=310 \text{ دينار.}$$

و يلاحظ كذلك أن كل المصانع صرفت معروضاتها إلا أنه على مستوى الطلب يبقى المستودع الثاني في حالة عجز يقدر بـ 20 وحدة.

ماداماً: الإستخدامات الأخرى لمصادر النقل: تستخدم مسائل النقل في العديد من المجالات الاقتصادية الهادفة إلى التدنئة، و من أمثلة ذلك، تمويل المشاريع، إذ يتم ذلك عادة عن طريق الاقتراض من البنوك مقابل أسعار فائدة، كما في المثال التالي:

مثال 6-7: مصرف تجاري له ثلاث وحدات بنكية يبلدان مختلفة بإمكانه تمويل 4 مشاريع استثمارية متفرقة، بأسعار فائدة بالنسبة المئوية يوضحها الجدول التالي:

	مشروع 1	مشروع 2	مشروع 3	مشروع 4
وحدة 1	10	14	12	17
وحدة 2	12	9	20	13
وحدة 3	11	15	16	14

جدول 6-30

الأموال التي تعرضها الوحدات الثلاث هي على التوالي: 40، 50، 70 مليار دينار، أما احتياجات تمويل المشاريع فتقدر لكل مشروع على التوالي: 20، 60، 60، 20 مليار دينار. تكون هذه المسألة في شكل مسألة نقل إذا ما طلب إيجاد خطة تمويل هذه المشاريع بحيث يحصل البنك على أعلى ربح ممكن. أو الخطة التي تتمول بها هذه المشاريع من هذه الوحدات بحيث تتحمل المشاريع مجتمعة أقل تكلفة ممكنة من جراء الاقتراض من الوحدات البنكية.

كما يمكن استخدام مسائل النقل أيضاً في تنفيذ المشاريع بأقل تكلفة، أو في تخطيط الشراء أو التمويل بالمواد للمصانع، و غير ذلك من المواضيع.

تمارين

تمرين 1: يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق دجلة نور انطلاقاً من ثلاثة موانئ رئيسية إلى ثلاث دول، حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

- ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها غيره هي 80 طن.
- ميناء وهران: الكميات الممكن تصديرها غيره هي 40 طن.
- ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها غيره هي 60 طن.

أما كميات الطلب لكل دولة فهي:

- الولايات المتحدة الأمريكية: حجم الطلب هو: 70 طن.
- كندا: حجم الطلب هو: 70 طن.
- أستراليا: حجم الطلب هو: 40 طن.

تكلفة نقل القطار الواحد من التمور بالدولار الأمريكي من كل ميناء إلى كل دولة مستوردة موضحة في الجدول التالي:

	و.م. أمريكية	كندا	أستراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

إذا كان الديوان هو الذي يتولى نقل المنتج إلى الدول المستوردة، و هدفه هو تصدير منتوجاته بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: 1- أكتب البرنامج الرياضي للمسألة.

2- إذا خصص لكل كمية منقولة من كل ميناء إلى كل دولة باخرة

واحدة، ما هو عدد البواخر المتوقع تصديره لنقل هذه الكميات. وضح؟

3- أوجد حل أساسي أول بطريقة: أ- الزاوية الشمالية الغربية. ب- التكلفة الدنيا. ج- بطريقة فوقل. وأحسب التكلفة الإجمالية عند كل حل.

4- إنطلاقاً من جدول الحل الأساسي الأول المحصول عليه من كل طريقة في السؤال 3 أوجد الحل الأمثل بطريقة: أ- التخطي. ب- التوزيع المعدل. و أشرح الحل.

تمرين 2: تريد مؤسسة توزيع البضاعة من نقل هذه البضاعة من مخازنها الأربعة الى مختلف نقاط التوزيع الستة بأقل تكلفة إجمالية، إذا علمت أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن الى كل نقطة بالدينار هي :

		نقاط التوزيع					
		1	2	3	4	5	6
مخزن	I	12	27	61	49	83	35
	II	23	39	78	28	65	42
	III	67	56	92	24	53	54
	IV	71	43	91	67	40	49

و أن الكميات المعروضة في كل مخزن بآلاف الوحدات هي على التوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9. و الكميات الممكن إستقبالها في كل نقطة توزيع بآلاف الوحدات هي على التوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

المطلوب:

- إيجاد الحل الأساسي الأول بكل الطرق التي تعرفها.
- إنطلاقاً من الحلول الأساسية الأولى في المطلوب 1 أوجد الحل الأمثل باتباع طريقة التخطي مرة، و طريقة التوزيع المعدل مرة أخرى.
تمرين 3: إحدى الشركات الصناعية لديها خمسة مصانع، ويتم توزيع إنتاجها في أربعة أسواق رئيسية متباعدة، علماً بأن كل المصانع تنتج منتجات متماثلة. إذا علمت أن إنتاج كل مصنع بالوحدات هي على التوالي: 100 ، 200 ، 300 ، 400 ، 500. وأن الكميات المطلوبة في الأسواق الأربعة هي: 500 ، 600 ، 300 ، 100. و أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع الى كل سوق هي:

		الأسواق الرئيسية			
		1	2	3	4
مصنع	I	10	20	5	7
	II	13	9	12	8
	III	4	15	3	9
	IV	14	7	1	0
	V	3	12	5	19

المطلوب: أوجد الحلول المثلى بإنتهاج جميع الطرق.

تمرين 4: إليك شبكة النقل التالية:

	1	2	3	4	العرض
I	10	0	20	11	15
II	12	7	9	20	25
III	0	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	

المطلوب: أوجد الحلول المثلى بإنتهاج جميع الطرق.

تمرين 5: أوجد الحلول المثلى بإنتهاج جميع الطرق لبيانات جدول النقل التالي:

	1	2	3	4	العرض
I	10	20	30	40	100
II	11	12	13	14	120
III	15	25	45	50	140
الطلب	70	130	50	50	

الفصل السابع

مسائل النقل - تعظيم الأرباح والعوائد-

إستخدامات مسائل النقل لا تقتصر فقط على حالة التدنئة كما تم التطرق الى ذلك في الفصل السابق، وإنما تتعدى ذلك الى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط المعروضة في حالة التدنئة مع بعض الاختلاف، حيث أن دالة الهدف تكون في حالة تعظيم، كما يتم إستبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة أو العائد.

أولا: صيغة البرنامج الخطي للمعألة: إذا افترضنا أن الربح أو العائد المحصل عليه من جراء نقل وحدة واحدة من المنبع i الى المصب j هو p_{ij} ، و الكميات المنقولة من كل منبع الى كل مصب هي x_{ij} و a_i هي كميات العرض لكل منبع و b_j هي كميات الطلب لكل مصب، فإن البرنامج الخطي الرياضي لمسألة النقل يكتب كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \end{cases} \\ \begin{cases} x_{ij} \geq 0 \\ p_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

حيث : $i=1,2,3,\dots,m$ و $j=1,2,3,\dots,n$: عدد المصبات. m هو عدد المنابع.

ثانياً: حل المسألة: إن حل مسائل النقل في حالة التعظيم لا تختلف كثيراً عن الحل في حالة التدنئة كما تم عرضه في الفصل السابق، إذ يتم إيجاد الحل الأساسي الأول تحت نفس الشروط، إما بطريقة:

- الزاوية الشمالية الغربية، أو،

- طريقة أعلى عائد وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة،

ثم يتم اختيار الحل إما بطريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل كما تم شرحهما في الحالة الأولى، غير أن الاختلاف يكمن في اختيار الخلايا التي تدخل الحل إذ على عكس حالة التدنئة، فإن الخلية المرشحة للدخول إلى الحل هي التي تعطي أكبر عائد حدي موجب (مقابل أقل تكلفة في الاتجاه السالب في حالة التدنئة)، وقياساً على ذلك نحصل على الحل الأمثل لما تعطي جميع الخلايا غير الداخلة في الحل عوائد حدية سالبة.

و تجدر الإشارة هنا أيضاً أن الخلايا الداخلة في الحل في أي جدول على طول سيرورة الحل يجب أن يساوي $m+n-1$.

مثال 7-1: المؤسسة الوطنية للصناعات الإلكترونية لها ثلاث وحدات لإنتاج التلفزيونات الملونة من نفس الطراز هي:

- وحدة البليدة، - وحدة سيدي بلعباس - وحدة تيزي وزو

هذه الوحدات مكلفة بتموين مخازنها الرئيسية المتواجدة في كل من:

- الجزائر، - وهران - قسنطينة

التي تكون بدورها السوق الوطنية. الكميات التي تكون الوحدات قادرة على إنتاجها و تسويقها و كذا الكميات التي تطلبها المخازن الرئيسية أسبوعياً والربح المحصل عليه من كل جهاز مرسل من كل وحدة إلى كل مخزن (بآلاف الدينارات) معروض في الجدول التالي:

العرض (بالجهاز)	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
200	1	3	9	وحدة البليدة
150	0.5	3	6	وحدة ت. وزو
250	8	0.5	4	وحدة م. بلعباس
600	100	220	280	الطلب (بالجهاز)

الجدول 7-1

المطلوب: أوجد شبكة النقل التي يجب على المؤسسة تبنيها والتي تسمح لها بالحصول على أعلى ربح ممكن باستخدام طريقة أعلى ربح.

نلاحظ أن مجموع العرض = مجموع الطلب، و بالتالي يمكن إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى ربح (مقابل أدنى تكاليف في حالة التدنئة)، بالمنطق التالي:

- أعلى ربح في الجدول هو 9 آلاف دج، خلية (1،1)، العرض 200 و الطلب 280، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 200، يستنفذ العرض، و يبقى طلب قيمته 80.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو 8 آلاف دج، خلية (3،3)، العرض 250 والطلب 100، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 100، يلبي كل الطلب، يبقى عرض قيمته 150 جهاز.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو 6 آلاف دج، خلية (1،2)، العرض 150 والطلب المتبقى من قبل هو 80، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 80، يلبي كل الطلب، يبقى عرض قيمته 70 جهاز.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو 4 آلاف دج، خلية (1،3)، العرض 150 غير أن الطلب مستوفى كلية، تتجاوز الخلية.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو 3 آلاف دج، خلية (2،1)، العرض مستنفذ، تتجاوز الخلية.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو أيضا 3 آلاف دج، خلية (2،2)، العرض المتبقى 70 و الطلب 220، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 70، يستنفذ العرض، يبقى طلب مقداره 150.
- الربح الموالى من حيث الكبر هو 1 ألف دج، خلية (3،1)، العرض مستوفى.
- الربح الموالى من حيث الكبر هو 0.5 ألف دج، خلية (3،2)، العرض مستوفى.

العرض	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
وحدة البلدة	1	3	9	200
وحدة ت.وزو	0.5	3	6	150
وحدة بلعباس	8	0.5	4	250
	100	150		
	100	220	280	600

الجدول 2-7.

- الربح الموالى من حيث الكبر هو 0.5 ألف دج، خلية (2،3)، العرض 150 والطلب 150، يتم إستيفاء الطلب و إنفاذ العرض، و تكون كل الكميات المعروضة قد وزعت و كل الكميات المطلوبة قد لبيت، و نحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول الملخص في الجدول 3-7.
- حيث أن الربح المحصل عليه هو:

$$P_0 = 200 \times 9 + 80 \times 6 + 70 \times 3 + 150 \times 0.5 + 100 \times 8 = 3365$$

أي الربح المحصل عليه عند إستخدام هذه الشبكة هو 3365 ألف دينار.

a_i	مصب 1	مصب 2	مصب 3	
منبع 1	9	3	1	200
منبع 2	6	3	0.5	150
منبع 3	4	0.5	8	250
b_j	280	220	100	600

جدول 3-7

و يبقى الآن إختيار الحل إذا كان أمثلا أم لا، و هذا بإختبار عوائد الوحدة الواحدة لكل خلية غير داخلية في الحل بأسلوب التخطي أو أسلوب التوزيع المعدل، و نختار هنا الأسلوب الأول، فيكون:

$$\sigma_{12} = 3 - 9 + 6 - 3 = -3$$

$$\sigma_{13} = 1 - 8 + 0.5 - 3 + 6 - 9 = -12.5$$

$$\sigma_{23} = 0.5 - 3 + 0.5 - 8 = -10$$

$$\sigma_{31} = 4 - 6 + 3 - 0.5 = 0.5$$

يلاحظ أن الخلية (1،3) تزيد الربح بمقدار 0.5 لكل تلفاز منقول غيرها، فإذا أمررنا غيرها، أي من المنبع 3 إلى المصب 1 مثلاً 20 تلفازاً فإن الربح الكلي سوف يزداد بمقدار $20 \times 0.5 = 10$ آلاف دينار.

كما جرى تحسين الحل في حالة التدنسة، نقوم أيضا هنا بنفس الشيء، إذ أن أكبر كمية يمكن إمرارها عبر الخلية المشار إليها هي 80 جهاز، و بإجراء التحويلات نحصل على الجدول 4-7.

a_i	وهران	قسنطينة	الجزائر	
200	1	3	9	البلدية
150	0.5	3	6	ت. وزو
250	8	0.5	4	بلعباس
600	100	70	80	b_j
	100	220	280	

الجدول 4-7.

و فيه يجب أن يكون الربح الجديد يزيد عن سابقه بـ 40 ألف دينار.

$$P1=200 \times 9 + 150 \times 3 + 80 \times 4 + 70 \times 0.5 + 100 \times 8 = 3405.$$

و يلاحظ بالفعل أن الربح الجديد إرتفع بمقدار 40 ألف دينار.

نعود من جديد فتحسب الربح الحدي للخلايا الفارغة:

$$\sigma_{12} = 3 - 9 + 4 - 0.5 = -2.5$$

$$\sigma_{13} = 1 - 8 + 4 - 9 = -12$$

$$\sigma_{21} = 6 - 3 + 0.5 - 4 = -0.5$$

$$\sigma_{23} = 0.5 - 8 + 0.5 - 3 = -10$$

كل الأرباح الحدية صارت سالبة و بالتالي فإنه لا توجد أية خلية أخرى يمكن عن طريقها تحسين الحل بزيادة الأرباح، و نكون بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل، والذي نفسره في ما يلي:

أ- وحدة البلدية : تمون مخزن الجزائر بـ 200 تلفاز أسبوعيا و تحصل على ربح قيمته 1800 . 10^3 دج.

ب- وحدة ت. وزو : تمون مخزن قسنطينة بـ 150 تلفاز أسبوعيا، تحصل على ربح قيمته 450 . 10^3 دج.

ج- وحدة بلعباس : تمون :

- الجزائر بـ 80 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 320 . 10^3 دج.
 - قسنطينة بـ 70 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 35 . 10^3 دج.
 - وهران بـ 100 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 800 . 10^3 دج.
- و تحصل بذلك مؤسسة الصناعات الإلكترونية ربحا كلياً قيمته: 3405 . 10^3 دج.

و هي خطة وحيدة إذ لا يمكن إيجاد خطة أخرى تؤدي الى نفس التكلفة لأنه لا توجد أية تكلفة حدية معدومة ضمن التكاليف الحدية لآخر جدول.

ثالثاً: حالات خاصة: من الحالات الممكن مصادفتها:

1- **محدد تساوي العرض مع الطلب:** في حالة التعظيم أيضا يمكن أن نقع في حالة عدم تساوي العرض مع الطلب و هو واقع المسائل الاقتصادية، و كما جرى العمل في الفصل السابق فإنه يتم أيضا إضافة الى الجدول الأساسي إمّا سطر خيالي بأرباح صفرية أو عمود خيالي بأرباح صفرية، قيمتهما هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، و يتم إيجاد الحل بشكل عادي جدا على أن نهمل السطر أو العمود المضاف عند الوصول الى جدول الحل الأمثل.

2- **حالة التداخل:** كما تم شرحها في الفصل السابق هي الحالة التي لا يساوي فيها عدد الخلايا الداخلة في الحل القيمة $m+n-1$ ، و حينئذ ينبغي أيضا التخلص من هذا الشكل بغية إيجاد كل المسارات للخلايا غير الداخلة في الحل، و هذا بإدخال قيمة صغيرة بجوار الصفر هي ϵ في أحد الخلايا أو بعض الخلايا المقابلة للسطر و العمود المشبعين في نفس الوقت، إذ ينبغي إشباع إمّا السطر أو العمود والإبقاء في أحدهما القيمة ϵ لتدخل الى إحدى الخلايا المقابلة في مرحلة أخرى و يتم التعامل معها و كأنها قيمة حقيقية، كما جرى ذلك في الفصل السابق (أنظر المثال 6-6).

تمارين

تمرين 1: شركة نقل أوكلت لها مهمة نقل الحبوب المستوردة من أربعة موانئ إلى أربعة مطاحن رئيسية داخل البلاد، حيث أن الكميات المخزنة المطلوب نقلها من الموانئ هي:

- ميناء عنابة: الكميات المطلوب نقلها منه هي: 35 ألف قنطار.
- ميناء جيجل: الكميات المطلوب نقلها منه هي 20 ألف قنطار.
- ميناء مستغانم: الكميات المطلوبة نقلها منه هي 25 ألف قنطار.
- ميناء الغزوات: الكميات المطلوب نقلها منه هي 15 ألف قنطار.

بينما قدرة إستقبال المطاحن هي:

- مطاحن مهدية: طاقة إستقبالها هي 35 ألف قنطار.
 - مطاحن مستغانم: طاقة إستقبالها 15 ألف قنطار.
 - مطاحن قورصو: طاقة إستقبالها 25 ألف قنطار.
 - مطاحن سطيف: طاقة إستقبالها 20 ألف قنطار.
- إذا كانت الأرباح المحتملة من طرف شركة النقل من وراء نقل كل قنطار من كل ميناء إلى كل مطحنة بالدينار هي:

	مهدية	مستغانم	قورصو	سطيف
ميناء عنابة	35	45	50	100
ميناء جيجل	35	40	55	70
ميناء مستغانم	100	120	60	25
ميناء الغزوات	45	60	35	10

في المطلوب: إذا كان هدف الشركة هو إيجاد أفضل خطة للنقل والتي تجعلها تحيى أكبر ربح ممكن:

1- أوجد الحل الأساسي الأول مرة بطريقة أعلى ربح و مرة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- أوجد أمثل خطة للنقل و حدد الأرباح الكلية التي تحيىها المؤسسة، مرة بإستعمال طريقة التخطي و مرة بإستعمال طريقة التوزيع المعدل.

تمرين 2: إقترح أفضل خطة تسمح بنقل البضاعة من من المحازن الأربعة إلى مختلف نقاط التوزيع الستة بأعلى عائد ممكن، إذا علمت أن عائد الوحدة الواحدة المنقولة من كل مخزن إلى كل نقطة بالدينار هي:

	1	2	3	4	5	6
I	12	27	61	49	83	35
II	23	39	78	28	65	42
III	67	56	92	24	53	54
IV	71	43	91	67	40	49

و أن الكميات المعروضة في كل مخزن بآلاف الوحدات هي على التوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9. و الكميات الممكن إستقبالها في كل نقطة توزيع بآلاف الوحدات هي على التوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

و هذا :- 1- إيجاد حل أساسي أول بكل الطرق التي تعرفها و أحسب العائد الكلي عند كل حل.

2- إنطلاقاً من جداول الحلول الأساسية الأولى المطلوبة في السؤال أوجد جداول الحل الأمثل بإستعمال مرة طريقة التخطي و مرة طريقة التوزيع المعدل.

تمرين 3: إحدى شركات النقل أمضت عقد لنقل منتوج شركة صناعية لديها خمسة مصانع ، في إتجاه أربعة مراكز رئيسية للتوزيع ، علماً بأن كل المصانع تنتج منتوجات متماثلة. إذا علمت أن إنتاج كل مصنع بالوحدات هو على التوالي: 100 ، 200 ، 300 ، 400 ، 500. كما أن الكميات المطلوبة في الأسواق الأربعة هي: 600 ، 500 ، 300 ، 100.

و أن الربح المحصل عليه من جراء نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل مركز توزيع هو:

	1	2	3	4
I	10	20	5	7
II	13	9	12	8
III	4	15	3	9
IV	14	7	1	0
V	3	12	5	19

المطلوب: أوجد أفضل خطة لنقل المنتجات و التي تسمح للشركة بالحصول على أعلى ربح بكل الطرق التي تعرفها.

تمرين 4: إليك جدول الأرباح المحصلة من كل منبع الى كل مصب و الكميات المعروضة من طرف كل منبع و الكميات المطلوبة من طرف كل مصب.

	1	2	3	4	العرض
I	10	0	20	11	15
II	12	7	9	20	25
III	0	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	

المطلوب: أجب على نفس أسئلة التمرين السابق .

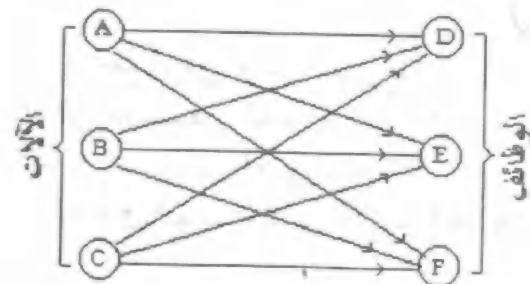
الفصل الثامن

مسائل التخصيص.

تلاقي الكثير من المؤسسات خاصة مؤسسات إنجاز المشاريع مشاكل تخصيص الموارد المادية و البشرية، لإنجاز مختلف الأعمال بكفاءة عالية و مردودية اقتصادية، و مسائل التخصيص تعطي حلا لذلك.

فإنشكالية مسائل التخصيص تلخص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص، أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك الى استخدامها بأعلى كفاءة ممكنة، مما يؤدي الى تحمل أقل التكاليف أو جني أعلى الأرباح، شريطة أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة فقط، و هذا يقتضي أن يكون عدد الوظائف مساو لعدد الأشخاص أو عدد الآلات.

و يمكن للشكل التالي أن يوضح ذلك، حيث أن لدينا ثلاث آلات هي A,B,C و ثلاث وظائف هي D,E,F، بحيث يمكن لكل آلة أن تنجز أي من الوظائف الثلاث إنما بتكاليف قد تكون مختلفة و هو ما تعبر عنه مجموعة الأسهم، حيث تنطلق من كل آلة ثلاثة أسهم و تصل الى كل وظيفة ثلاثة أسهم.



شكل 8-1

و يمتد إستخدام مسائل التخصيص الى الكثير من المسائل الواقعية الأخرى كتخصيص عدد من الحافلات لعدد من الأحياء السكنية، أو تخصيص عدد من المقاولين لإنجاز عدد من المشاريع... الخ.

أولاً : طرح المسألة : يطرح مشكل التخصيص على وجه المثال التالي:

مثال 1-8: مؤسسة لإنجاز الآبار لديها 3 آلات للحفر هي C, B, A، كلفت بحفر 3 آبار هي: D, E, F في 3 مناطق مختلفة. إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة و حسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، و قد بيتتها الدراسة الأولية التي قامت بها مصلحة المحاسبة التحليلية بالمؤسسة كما هي موضحة في الجدول التالي:

التكلفة بالآلاف الدينارات

الوظائف	D	E	F
الآلات			
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول 1-8

و يكون المطلوب هو إيجاد أفضل تخصيص للآلات بحيث تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة لحفر الآبار الثلاثة، بمعنى ينبغي الإجابة عن:

- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر D ؟
 - ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر E ؟
 - ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر F ؟
- بحيث تتحمل المؤسسة في النهاية أقل تكلفة ممكنة.

و مسائل التخصيص لا تتم فقط بتدنية التكاليف، إنما أيضا بالبحث عن أفضل تخصيص من شأنه تعظيم الأرباح أو العوائد.

ثانياً: طرق حل مسائل التخصيص: هناك عدة طرق لحل مثل هذه المسائل، سوف نتطرق لثلاث منها و هي:

- طريقة الحصر الإجمالي (تسمى أيضا طريقة العد الكامل).

- الطريقة الهنغارية.

- طريقة النقل.

و تستخدم هذه الطرق سواء في تخفيض تكاليف التخصيص أو في تعظيم الأرباح أو العوائد إنما بمنطقين متعاكسين.

1- تخفيض التكاليف: يتم إيجاد الحل بإحدى الطرق التالية:

أ- طريقة الحصر الإجمالي: في هذه الطريقة نحدد كل احتمالات التخصيص الممكنة بحيث يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة، و يكون عدد التخصيصات الممكنة مساو الى مضروب عدد الوظائف، فإذا فرضنا أن عدد الوظائف هو N و هو بنفس حجم عدد الآلات فإن عدد احتمالات التخصيصات الممكنة هو N! حيث:

$$N! = N(N-1)(N-2)(N-3)....(N-(N-1))$$

ثم نحدد هذه التخصيصات و نحسب تكاليف كل توزيع ثم نأخذ التخصيص الذي يكلف أقل ما يمكن.

مثال 1-8: أوجد حل مسألة التخصيص الواردة في المثال السابق 1-8 بطريقة الحصر الإجمالي.

من المسألة نجد أن عدد الوظائف يتساوى مع عدد الآلات ويساوي 3، لذلك فإن الاحتمالات الممكنة هي: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. وهذه الاحتمالات هي:

- 1- (A,D), (B,E), (C,F).
- 2- (A,D), (B,F), (C,E).
- 3- (B,D), (A,E), (C,F).
- 4- (B,D), (A,F), (C,E).
- 5- (C,D), (A,E), (B,F).
- 6- (C,D), (A,F), (B,E).

أي أن الاحتمال الأول مثلاً هو أن نخصص الآلة A للوظيفة D، ونخصص الآلة B للوظيفة E والآلة C للوظيفة F. وعلى نفس المنوال تفسر بقية الاحتمالات. لاحظ أننا تقادينا إعطاء أكثر من وظيفة لكل آلة. بعد تحديد الاحتمالات الممكنة نقوم بحساب تكلفة كل احتمال يمكن اختياره و ذلك كما يلي:

رقم الاحتمال	الاحتمالات	تكاليف كل اختيار / 10 ³ دج
1	(A,D), (B,E), (C,F).	18+14+10=42
2	(A,D), (B,F), (C,E).	18+10+8=36
3	(B,D), (A,E), (C,F).	12+6+10=28
4	(B,D), (A,F), (C,E).	12+14+8=34
5	(C,D), (A,E), (B,F).	16+6+10=32
6	(C,D), (A,F), (B,E).	16+14+14=44

جدول 8-2

من تكاليف الاختيارات نأخذ أقل تكلفة و يكون الاختيار الأمثل هو الاختيار المقابل لتلك التكلفة، و في مثالنا أقل تكلفة هي 28 ألف دينار و بالتالي فإن الاختيار الثالث هو الأحسن وبذلك يكون التخصيص على النحو التالي:

- الآلة B تنجز البئر D بتكلفة تقدر بـ: 12000 دج.
- الآلة A تنجز البئر E بتكلفة تقدر بـ: 6000 دج.
- الآلة C تنجز البئر F بتكلفة تقدر بـ: 10000 دج.

و كما هو واضح في العمود الثالث من جدول الاختيارات السابق، فإن التكلفة الإجمالية الدنيا التي تتحملها المؤسسة عبارة عن مجموع تكاليف كل تخصيص، أي:

$$Z=12000+6000+10000=28000$$

و يكون هذا هو أحسن تخصيص ممكن.

ب- الطريقة المصفافية: سميت بهذه الطريقة نسبة إلى الرياضي المجري د. كوهن KUHN، و لإيجاد أفضل تخصيص بهذه الطريقة يتم إتباع المنهجية التالية:

بعد تعيين مصفوفة التكاليف و وضعها في جدول تتبع خطوات المراحل التالية:

المرحلة الأولى: إيجاد الأصفار: حيث نوجد ما يسمى بمصفوفة تكلفة الفرصة و ذلك كما يلي:

- نأخذ أقل تكلفة في كل صف ونطرحها من تكاليف ذلك الصف، فيتحول الرقم المقابل لأقل تكلفة إلى الصفر، ونحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى بمصفوفة المراجعة الأولى.

- من الجدول الجديد نأخذ أقل رقم من كل عمود ونطرحه من أرقام ذلك العمود، فيتحول الرقم المقابل لأقل رقم في العمود إلى الصفر، و نحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى بمصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.

المرحلة الثانية: البحث عن حل أمثل: من الجدول المحصل عليه من المرحلة السابقة نبحث عن حل بحيث تكون فيه التكاليف الكلية معدومة، حيث نقوم بتأطير الأعمدة و الصفوف التي تحتوي على أصفار بأقل عدد ممكن من الإطارات الأفقية أو العمودية أو هي معاً، فإذا كان عدد الإطارات المحصل عليها سواء الأفقية أو العمودية مساوياً لعدد

الصفوف أو الأعمدة، فإننا نكون قد تحصلنا على الحل الأمثل، و عليه نقوم بعملية التخصيص و ذلك بأن نأخذ الأصفار التي تقع على إطارات الصفوف و الأعمدة لأن هذه الأصفار تمثل أقل التكاليف، حيث نقوم بعملية التخصيص على أساسها بإعطاء وظيفة واحدة لكل آلة أو وظيفة واحدة لكل شخص. إذا كان هذا ممكنا نكون قد توصلنا الى الحل الأمثل وإلا تنتقل الى المرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة: إذا كان عدد الأطر التي تغطي الأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فإنه لا يمكن القيام بكل التخصيصات، و لأجل ذلك نقوم باختيار أقل قيمة من القيم غير المؤطرة و نطرحها من كل القيم غير المؤطرة و نضيفها الى نقاط التقاطع للأطر. (لاحظ أن مكان هذه القيمة يصبح صفرا).

المرحلة الرابعة: نعود الى المرحلة الثانية و هذا حتى يصبح عدد الإطارات المحصل عليها مساويا لعدد الوظائف و حينها نقوم بعملية التخصيص.

ملاحظة: يمكن أن نحصل على عدد من الحلول بنفس التكاليف الدنيا. مثال 3-8: قم بتخصيص الآلات A, B, C للقيام بالوظائف 1, 2, 3 إذا علمت أن تكاليف قيام كل آلة بكل وظيفة محددة في الجدول التالي:

تكاليف التخصيص بآلاف الدينارات

الوظائف	1	2	3
الآلات			
A	13	7	14
B	9	7	7
C	5	10	12

جدول 3-8

نقوم باتباع الخوارزمية خطوة خطوة و على الوجه التالي:

- أقل قيمة في الصف الأول هي: 7

- أقل قيمة في الصف الثاني هي: 7

- أقل قيمة في الصف الثالث هي: 5

يطرح كل قيمة من هذه القيم من الصف الذي تنتمي اليه نحصل على الجدول التالي:

الوظائف	1	2	3
الآلات			
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول 4-8

من الجدول الجديد:

- أقل قيمة في العمود الأول هي: 0

- أقل قيمة في العمود الثاني هي: 0

- أقل قيمة في العمود الثالث هي: 0

وعليه لا يحدث أي تغيير على مستوى الأعمدة.

و يمكن تأطير الأصفار كما يلي:

الوظائف	1	2	3
الآلات			
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول 5-8

بما أن أقل عدد من الإطارات المحصل عليها يساوي 3 و يساوي عدد الآلات و عدد الوظائف، لذلك فإن هذا الجدول هو الجدول الذي يمكن التخصيص على أساسه، بإعطاء آلة واحدة لكل وظيفة، و عليه فإن التخصيص الأمثل يكون كما يلي:

- في الصف الأول هناك صفر وحيد (A,2)، و عليه نخصص الآلة A للوظيفة 2 بتكلفة 7. و نشطب كل أصفار العمود الثاني، فلا يمكن تخصيص الآلة B للوظيفة 2 ، لأن هذه الوظيفة خصصت لها الآلة A.

- في الصف الثاني هناك صفر واحد غير مشطب (B,3) على أساسه نخصص الآلة B للوظيفة 3 و بتكلفة 7.

- في الصف الثالث هناك صفر واحد (C,1) على أساسه نخصص الآلة C للوظيفة الأولى و بتكلفة 5. و نكون بذلك قد خصصنا لكل وظيفة آلة واحدة فقط، و عليه تتحمل المؤسسة أقل تكلفة أي :

$$Z=7000+7000+5000=19000$$

أي أن أقل تكلفة للتخصيص هي 19000 دينار.

مثال 4-8: بالطريقة الهنغارية أوجد حل للمثال 1-8

جدول تكاليف التخصيص للمثال المشار اليه هو:

جدول التكاليف بآلاف الدينارات

وظائف آلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول 6-8

يتم اتباع الخوارزمية على النحو التالي:

- أقل قيمة في الصف الأول هي: 6

- أقل قيمة في الصف الثاني هي: 10

- أقل قيمة في الصف الثالث هي: 8

بطرح كل قيمة من هذه القيم من الصف الذي تنتمي اليه نحصل على الجدول التالي:

	D	E	F
A	12	0	8
B	2	4	0
C	8	0	2

جدول 7-8

من الجدول الجديد:

- أقل قيمة في العمود الأول هي: 2

- أقل قيمة في العمود الثاني هي: 0

- أقل قيمة في العمود الثالث هي: 0

و عليه فإن الجدول الثاني هو:

	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول 8-8

و عليه يمكن تأطير الأصفار كما يلي:

وظائف آلات	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول 9-8

بما أن أقل عدد من الإطارات المحصل عليها يساوي 2 و هو لا يساوي عدد الآلات و عدد الوظائف، لذلك فإن هذا الجدول لا يتيح إمكانية التخصيص. لذلك نختار أقل رقم من بين الأرقام خارج الأطارين و هو 2 ونطرحه من كل الأرقام خارج هذين الإطارين و نضيفه الى الرقم الذي يتقاطععا عنده و هو 4، وبذلك نحصل على الجدول الجديد التالي:

	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول 8-10

و عليه فإن التأطير الجديد هو:

وظائف آلات	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول 8-11

و يلاحظ أن عدد الإطارات أصبحت مساوية لعدد الآلات وعدد الوظائف لذلك فإن هذا الجدول يتيح إمكانية التخصيص الأمثل، ومنه نعطي التخصيص التالي:

- من الصف الأول نأخذ (A,E) ونخصص الآلة A للوظيفة E بتكلفة تقدر بـ 6000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود). - من الصف الثاني نأخذ (B,D) ونخصص الآلة B للوظيفة D بتكلفة تقدر بـ 12000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود)، يلاحظ أنه لا يمكن أخذ (B,F) لأنه في هذه الحالة سوف لن نجد ما نخصصه للآلة C.

- من الصف الثالث نأخذ (C,F) ونخصص الآلة C للوظيفة F بتكلفة تقدر بـ 10000 دج.

و بذلك تكون أدنى تكلفة ممكنة لهذا التخصيص هي:

$$Z=6000+12000+10000=28000$$

و هي نفس التكلفة الدنيا المحصل عليها باستعمال طريقة الحصر الاحتمالي.

ج- طريقة النقل: يمكن استخدام طريقة مسائل النقل في إيجاد أحسن تخصيص، وذلك ببناء جدول للنقل يحتوي على التكاليف والتي هي تكاليف التخصيص، غير أن كميات العرض و كميات الطلب لكل سطر و عمود يجب أن نضعها مساوية للواحد، و يكون بذلك مجموع العرض مساويا لمجموع الطلب و مساويا لعدد المهام، ثم نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا (مستحسن)، أو أية طريقة أخرى تماما كما تم العمل في مسائل النقل، غير أنه ينبغي في هذه الحالة الحرص على عدم الوقوع في حالة التفكك لكون الكثير من الأسطر و الأعمدة تشيع في نفس الوقت، و في هذه الحالة نحرص على تشيع إما السطر أو العمود، و نبقى قيمة صغيرة ϵ لتعامل معها و كأنها عدد و نعملها عند الوصول الى الحل الأمثل.

مثال 8-5: بطريقة النقل - التكلفة الدنيا- أوجد حل لبرنامج التخصيص الوارد في المثال 8-1.

جدول تكاليف التخصيص المشار اليه هو:

	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول 8-12

لإيجاد الحل بطريقة مسائل النقل نقوم بتشكيل جدول النقل أولا، حيث نجعل كميات العرض و الطلب على مستوى كل سطر و عمود مساوية للواحد، و نضع التكاليف في الزوايا العلوية اليمنى لكل خلية، تماما كما فعلنا في مسائل النقل، و بذلك نحصل على جدول النقل التالي:

و يتم بعد هذا اختيار الحل إذا كان أمثلاً أم لا زال قابلاً
للتحسين إما بأسلوب التخطي أو أسلوب التوزيع المعدل،
وسنختار هنا الأسلوب الأول، حيث نجد التكاليف الحدية
للخلايا غير الداخلة في الحل كما يلي:

$$\begin{aligned}\sigma_{AF} &= 14 - 10 + 12 - 18 = -2 \\ \sigma_{BE} &= 14 - 12 + 18 - 6 = 14 \\ \sigma_{CE} &= 8 - 6 + 18 - 16 = 4 \\ \sigma_{CF} &= 10 - 10 + 12 - 16 = -4\end{aligned}$$

بما أن ليس كل التكاليف الحدية غير سالبة لذلك فإن هذا الحل
هو حل غير أمثل، و الخلية التي تدخل إلى الحل هي CF لأن
 $\sigma_{CF} = -4$ أي أن إدخال هذه الخلية للحل سوف يؤدي إلى
إنخفاض التكاليف الكلية بمقدار 4 وحدات نقدية لكل وحدة
كمية، و عليه في إجراء التحويلات على مسار هذه الخلية نحصل
على جدول الحل الثاني و هو:

	D	E	F	a_i
A	18 (ϵ)	6 (1)	14	1
B	12 (1)	14	10 (ϵ_1)	1
C	16	8	10 (1- ϵ_1)	1
b_j	1	1	1	3

جدول 8-15

لإختبار هذا الحل نبحث عن التكاليف الحدية فنجد:

	D	E	F	a_i
A	18	6	14	1
B	12	14	10	1
C	16	8	10	1
b_j	1	1	1	3

جدول 8-13

بعد تكوين جدول النقل نقوم بإيجاد الحل الأساسي الأول
بطريقة التكلفة الدنيا فنحصل على الجدول التالي:

	D	E	F	a_i
A	(ϵ)	(1)	/	1
B	(ϵ_1)	/	(1)	1
C	(1- ϵ_1)	/	/	1
b_j	1	1	1	3

جدول 8-14

يظهر في الجدول أعلاه الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة
الدنيا، و يلاحظ أنه حرصاً على عدم تفكك الحل أي ضرورة
تحقق شرط $m+n-1$ من الخلايا الداخلة في الحل و لأجل ذلك
تمت الاستعانة بـ ϵ تماماً كما تم شرح ذلك في الفصل الخاص
بمسائل النقل - حالة التفكك.

$$\begin{aligned}\sigma_{AF} &= 14 - 10 + 12 - 18 = -2 \\ \sigma_{BE} &= 14 - 12 + 18 - 6 = 14 \\ \sigma_{CD} &= 16 - 12 + 10 - 10 = 4 \\ \sigma_{CE} &= 8 - 10 + 10 - 12 + 18 - 6 = 8\end{aligned}$$

نلاحظ أن الحل لازال قابلا للتحسين، حيث يتطلب إدخال الخلية AF للحل لتخفيض التكاليف بـ 2 وحدة نقدية لكل وحدة كمية، حيث تصبح كل التكاليف الحدية موجبة، ويكون الحل حلا أمثلا، بحذف الأحرف المساعدة نحصل على جدول الحل الأمثل للتخصيص بطريقة مسائل النقل وهو على النحو التالي:

	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول 8-16

و يعني هذا أن أمثل تخصيص هو التالي:

- الآلة A تخصص للعمل E بتكلفة 6000 دج.
- الآلة B تخصص للعمل D بتكلفة 12000 دج.
- الآلة C تخصص للعمل F بتكلفة 10000 دج.

و هذا بتكلفة تخصيص إجمالية دنيا تقدر بـ: 28000 دج، وهي نفس التكلفة المحصل عليها باستعمال الطريقتين الأخريتين.

2- تعظيم الأرباح أو العوائد: في حالة تعظيم أرباح التخصيص يتم أيضا إتباع نفس الطرق المشار إليها في حالة التدنسة، إنما بنظرة معاكسة.

1- التعظيم بطريقة العنصر الاحتمالي: في هذه الحالة يتم إيجاد اختيارات التخصيص الممكنة ثم حساب أرباح أو عوائد كل تخصيص و أخذ التخصيص الذي يعطي أعلى ربح أو عائد، و كما تم توضيح ذلك في حالة التدنسة فإن الاحتمالات الممكنة عبارة عن مضروب N.

مثال 8-6: مؤسسة للنقل المدني تملك ثلاث حافلات مختلفة الحمولة، تريد تخصيصها لنقل ركاب ثلاث أحياء متباعدة، الدراسة الأولية بينت لها أنه وفقا للتعريف الجاري العمل بها ووفقا لحجم حركة الركاب، فإن الأرباح التي يمكن جنيها من جراء تخصيص كل حافلة لكل حي موضحة في الجدول التالي:

الأرباح بآلاف الدينارات شهريا

أحياء حافلات	D	E	F
A	72	24	56
B	48	56	40
C	64	32	40

جدول 8-17

المطلوب: أوجد التخصيص الذي يسمح للمؤسسة بالحصول على أعلى الأرباح بطريقة الحصر الاحتمالي. يلاحظ أن عدد الحافلات هو 3، و منه فإن الاحتمالات الممكنة هي:

$$6 = 1 \times 2 \times 3$$

ومنه فإن الجدول التالي يظهر الاختيارات الممكنة و أرباح كل اختيار:

رقم الاحتمال	الاختيارات	تكاليف كل اختيار
1	(A,D), (B,E), (C,F).	$72+56+40=168$
2	(A,D), (B,F), (C,E).	$72+40+32=144$
3	(B,D), (A,E), (C,F).	$48+24+40=112$
4	(B,D), (A,F), (C,E).	$48+56+32=136$
5	(C,D), (A,E), (B,F).	$64+24+40=128$
6	(C,D), (A,F), (B,E).	$64+56+56=176$

جدول 8-18

من الجدول نلاحظ أن أعلى الأرباح هي التي يحققها الاحتمال السادس و بالتالي فإن أمثل تخصيص هو:

(C,D), (A,F), (B,E).

أي أن:

- الحافلة C تخصص للحي D بربح يقدر بـ: 64.000 دينار شهريا.
 - الحافلة A تخصص للحي F بربح يقدر بـ: 56.000 دينار شهريا.
 - الحافلة B تخصص للحي E بربح يقدر بـ: 56.000 دينار شهريا.
- أي أن أعظم ربح ينجى من هذا التخصيص يقدر بـ: 176.000 دينار شهريا

ب- التحضير بالطريقة المنغارية: في هذه الطريقة لإيجاد التخصيص الذي يعطي أعظم الأرباح والعوائد فإنه يتم تقريبا اتباع نفس المنهجية المتبعة في حالة التدنئة، حيث يتم إيجاد أكبر رقم في مصفوفة الأرباح أو العوائد ثم يتم طرح قيم المصفوفة من القيمة التي تمثل أعلى ربح أو أعلى عائد، ونحصل بذلك على جدول جديد من خلاله نعود الى استخدام نفس الخطوات الموضحة في حالة التدنئة، و يتم ذلك كما في المثال التالي:

مثال 8-7: أوجد التخصيص الذي من شأنه أن يعطي أعظم الأرباح بالطريقة المنغارية من جدول المثال السابق. أكبر ربح في الجدول هو 72، نطرح كل عناصر الجدول من القيمة 72 فنحصل على الجدول التالي:

	D	E	F
A	0	48	16
B	24	16	32
C	8	40	32

جدول 8-19

من الجدول الجديد المحصل عليه تتبع الآن نفس الخطوات المتبعة في حالة التدنئة و ذلك كما يلي:

- نأخذ أدنى قيمة من كل صف ونطرحها من قيم كامل ذلك الصف:
 - أدنى قيمة في الصف الأول هي 0.
 - أدنى قيمة في الصف الثاني هي 16.
 - أدنى قيمة في الصف الثالث هي 8.
- بالطرح نحصل على الجدول الجديد التالي:

	D	E	F
A	0	48	16
B	8	0	16
C	0	32	24

جدول 8-20

نأخذ أدنى قيمة على مستوى كل عمود ونطرحها من كامل عناصر ذلك العمود:

- أدنى قيمة في العمود الأول هي 0.
- أدنى قيمة في العمود الثاني هي 0.
- أدنى قيمة في العمود الثالث هي 16.

و منه فإن الجدول الجديد هو:

وظائف آلات	D	E	F
A	0	48	0
B	8	0	0
C	0	32	8

جدول 8-21

من الجدول المحصل عليه، نوظّر الأصفار بأقل عدد ممكن من الأظرف، و هو ما يظهر في الجدول أعلاه.

نلاحظ أن عدد الأظرف الدنيا المحصل عليها متساو مع عدد الأسطرف الأعمدة و بالتالي فإن هذا الجدول يعطي التخصيص الأمثل و هو نفسه المحصل عليه بطريقة الحصر الإحتمالي، أي:

الحافلة C تخصّص للحي D بربح يقدر بـ 64.000 دينار شهرياً.
الحافلة A تخصّص للحي F بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهرياً.
الحافلة B تخصّص للحي E بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهرياً.
أي أن أعظم ربح يحقّ من هذا التخصيص يقدر بـ:
176.000 دينار شهرياً.

ج- التعظيم بطريقة النقل: يمكن استخدام طريقة النقل أيضاً في إيجاد أفضل تخصيص يعطي أعلى ربح أو عائد، كما تم التطرق الى ذلك في مسائل النقل، حيث يتم في هذه الحالة تكييف مسألة التخصيص في شكل مسألة للنقل، يجعل الطلب على مستوى كل سطر و على مستوى كل عمود مساوياً للواحد، و يتم إيجاد الحل بطريقة أعلى الأرباح كما تم تناولها في مسائل النقل - تعظيم الأرباح.

مثال 8-8: أوجد التخصيص الأمثل لبيانات المثال السابق بطريقة مسائل النقل.

نقوم بتكييف مسألة التخصيص في شكل مسألة نقل كما يلي:

	D	E	F	ai
A	72	24	56	1
B	48	56	40	1
C	64	32	40	1
b _j	1	1	1	3

جدول 8-22

نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى الأرباح كما تم التطرق إليها في مسائل النقل، مع الحرص الشديد على عدم إظهار حالة التفكك في الحل بالإستعانة بـ ϵ أي الحرص على عدم إشباع الصف و العمود في نفس الوقت، حيث نحصل على جدول الحل الأساسي الأول التالي:

	D	E	F	Ai
A	72 ①	24	56 ⑤	1
B	48	56 ①	40	1
C	64	32 ⑤	40 ①-⑤	1
B _j	1	1	1	3

جدول 8-23

بأسلوب التخطي يتم اختبار الحل إذا ما كان أمثلاً، حيث نحسب:

$$\begin{aligned}\sigma_{AE} &= 24 - 56 + 40 - 32 = -24 \\ \sigma_{BD} &= 48 - 72 + 56 - 40 + 32 - 56 = -32 \\ \sigma_{BF} &= 40 - 40 + 32 - 56 = -24 \\ \sigma_{CD} &= 64 - 72 + 56 - 40 = 8\end{aligned}$$

و معلوم أنه في حالة التعظيم نكون أمام الحل الأمثل إذا كانت كل التكاليف الحدية غير موجبة، و حيث أن $\sigma_{CD} = 8$ لذلك فإن هذا الحل غير أمثل، إذ ينبغي إدخال الخلية CD إلى الحل، و عليه فإجراء التحويلات اللازمة على مسار هذه الخلية نحصل على الجدول التالي:

	D	E	F	ai
A	72	24	56	1
B	48	56	40	1
C	64	32	40	1
bj	1	1	1	3

جدول 8-24

أيضاً بأسلوب التخطي يتم اختبار الحل إذا ما كان أمثلاً، حيث نحسب التكاليف الحدية على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\sigma_{AE} &= 24 - 32 + 64 - 72 = -16 \\ \sigma_{BD} &= 48 - 56 + 32 - 64 = -40 \\ \sigma_{BF} &= 40 - 56 + 72 - 64 + 32 - 56 = -32 \\ \sigma_{CF} &= 40 - 56 + 72 - 64 = -8\end{aligned}$$

يلاحظ أن كل التكاليف الحدية صارت غير موجبة، و بالتالي فإن الجدول السابق يتضمن الحل الأمثل.

براهم: القيمة ϵ المساعدة من الجدول نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

	D	E	F	ai
A	72	24	56	1
B	48	56	40	1
C	64	32	40	1
bj	1	1	1	3

جدول 8-25

و هو نفس الحل المتوصل اليه بطريقة الحصر الاحتمالي و طريقة التخطي أي:

الخافلة C تخصص للحج D بربح يقدر بـ 64.000 دينار شهرياً.
الخافلة A تخصص للحج F بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهرياً.
الخافلة B تخصص للحج E بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهرياً.
أي أن أعظم ربح يحق من هذا التخصيص يقدر بـ:
176.000 دينار شهرياً.

ثالثاً: حالة خاصة: في حالة ما إذا كان عدد الأسطر لا يساوي عدد الأعمدة، أي عدد الآلات لا يساوي عدد الوظائف، فإنه يتم اللجوء إلى إضافة إما سطر وهمي أو عمود وهمي حسب الحالة (تعظيم أو تدنيس) تكون فيه تكاليف أو أرباح التخصيص صفريّة، و يتم بعد ذلك إيجاد الحل الأمثل بأية طريقة من الطرق التي تم التطرق إليها، ثم يتم في النهاية إهمال العمود أو السطر الذي تمت إضافته، لنبقى إما آلة بدون تخصيص أو وظيفة بدون آلة.

مثال 8-9: أوجد أمثل تخصيص للحافلات A, B, C, D لنقل مجموعة من العمال الى المصانع E, F, G، إذا علمت أن تكاليف النقل لكل حافلة الى كل مصنع هي بمئات الدينارات كما يلي:

	E	F	G
A	25	39	23
B	23	45	15
C	16	38	10
D	22	28	16

جدول 8-26

نلاحظ أن عدد الحافلات هو 4 بينما عدد الاتجاهات هو 3، أي أن عدد الأسطر أكبر من عدد الأعمدة، لذلك نقوم بإضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية، فنحصل على الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	25	39	23	0
B	23	45	15	0
C	16	38	10	0
D	22	28	16	0

جدول 8-27

نوجد الحل بالطريقة الهنغارية:

- أقل قيمة في السطر الأول هي 0.
- أقل قيمة في السطر الثاني هي 0.
- أقل قيمة في السطر الثالث هي 0.
- و بالتالي لا يحدث أي تغيير على مستوى الأسطر.
- أقل قيمة في العمود الأول هي 16.
- أقل قيمة في العمود الثاني هي 28.
- أقل قيمة في العمود الثالث هي 10.
- أقل قيمة في العمود الرابع هي 0.
- بإجراء التغييرات نحصل على الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	9	11	13	0
B	7	17	5	0
C	0	10	0	0
D	6	0	6	0

جدول 8-28

ومن ثم فإن الجدول التالي يظهر الإطارات الأقل التي تغطي الأصفار، وعددها 3 وهي أقل من عدد الصفوف و الأعمدة، و بالتالي فالحل غير أمثل، لذلك نختار أقل قيمة من القيم غير

	E	F	G	H
A	9	11	13	0
B	7	17	5	0
C	0	10	0	0
D	6	0	6	0

جدول 8-29

المغطاة و هي 5 و نطرحها من القيم غير المغطاة و نضيفها الى تقاطع الأطر فنحصل على الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	4	6	8	0
B	2	12	0	0
C	0	10	0	5
D	6	0	6	5

جدول 8-30

و يلاحظ الآن أن عدد الأطر صار مساويا لعدد الأعمدة وبالتالي فإن الحل صار أمثلا، و عليه يمكن إجراء التخصيص التالي:

- الحافلة A تخصص للمصنع الخيالي H بتكلفة 0.
- الحافلة B تخصص للمصنع G بتكلفة 23
- الحافلة C تخصص للمصنع E بتكلفة 16
- الحافلة D تخصص للمصنع F بتكلفة 28

و يظهر ذلك الجدول التالي:

	E	F	G
A			
B			15
C	16		
D		28	

جدول 8-31

و تبلغ التكاليف الكلية: $Z=15+16+28=59$ مائة دينار.
ويلاحظ أننا أهملنا المصنع الوهمي المضاف، دلالة على أن الحافلة A تبقى دون تشغيل.

تمارين

- تمرين 1:** اشرح ماذا تدرس مسائل التخصيص، و ماهي طرق حلها.
تمرين 2: قدم مسألة تصورية أقرب الى الواقع حول مسائل التخصيص.
تمرين 3: يتنافس أربع مقاولين على إنجاز أربع مشاريع تابعة لإدارة مركزية، لتحمل أقل التكاليف حصرت الإدارة تكاليف تخصيص كل مقاول لكل مشروع، في الجدول التالي:

التكاليف بملايين الدينارات

	مشروع 1	مشروع 2	مشروع 3	مشروع 4
مقاول 1	5	10	8	4
مقاول 2	2	10	5	7
مقاول 3	3	8	5	1
مقاول 4	6	15	7	2

المطلوب:، استعمل طريقة الحصر الإحصائي و الطريقة المنغارية و طريقة النقل لإيجاد أفضل تخصيص تقترحه على الإدارة.

تمرين 4: ما هو أفضل تخصيص لمجموعة من العمال على مجموعة من الآلات إذا كان الوقت الذي يحتاجه كل عامل على كل آلة بالساعات محدد في الجدول التالي:

	آلة 1	آلة 2	آلة 3	آلة 4
عامل 1	5	7	4	2
عامل 2	4	5	6	8
عامل 3	6	3	1	2
عامل 4	1	5	3	4

استعمل جميع طرق الحل في إيجاد أفضل تخصيص، و حدد الوقت الأدنى لهذا التخصيص.

تمرين 5: الجدول التالي يظهر العوائد المحققة من جراء تخصيص مجموعة من العمال على مجموعة من الآلات في إحدى شركات الطباعة.

العوائد بمئات الدينار شهريا.

	آلة 1	آلة 2	آلة 3	آلة 4
عامل 1	5	-	2	10
عامل 2	7	4	-	5
عامل 3	10	8	1	6
عامل 4	-	4	3	8

المطلوب: ماهو أفضل تخصيص تقترحه على الشركة و ماهي قيمة العائد الأعظم لهذا التخصيص.

تمرين 6: شركة طيران جديدة تمتلك 5 طائرات متفاوتة الحمولة والخصائص، منحت لها مديرية النقل الجوي رخصة لاستغلال 5 خطوط من و الى العاصمة، الدراسة التحليلية التي قامت بها أضفت الى تحديد الأرباح الشهرية الممكن جنيها عند كل تخصيص و هي موضحة في الجدول التالي:

الخط	تندوف	بشار	تمراست	قسنطينة	وهران
طائرة 1	100	120	80	130	130
طائرة 2	80	70	70	60	50
طائرة 3	70	60	50	30	30
طائرة 4	20	30	25	10	10
طائرة 5	120	110	90	150	150

المطلوب: أوجد أفضل تخصيص تقترحه على الشركة باستعمال جميع طرق الحل، و حدد أعلى ربح تحققه الشركة من التخصيص المقترح.

الفصل التاسع نظرية القرارات

تقديم: من أخطر ما يواجه المسير في يوميات الإشراف والتوجيه اتخاذ قرارات يكون لها الأثر المباشر على حياة المؤسسة التي يشرف عليها سواء بالإيجاب أو السلب، و كثيرا ما تكون أمامه بدائل كثيرة، منطق التسيير العقلاني يفرض عليه إختيار أحسنها، غير أن مسألة إختيار هذا الأحسن ليست بالأمر الإعتباطي، إذ يجب أن يكون مبنيا على أسس قريبة من اليقين، غير أن هذا لا يكون متوفرا في جميع الحالات، فيكون لمنطق التجربة دورا في إختيار البديل الأحسن بحكم التجارب السابقة، وقد يكون لمنطق التحليل و تبسيط النتائج الممكنة لهذه البدائل دورا في تحديد ذلك، غير أن المسير الناجح هو الذي يعتمد على الطرق العلمية في اتخاذ قراراته بخصوص مجموعة البدائل المتاحة لإختياراته لإتخاذ القرار السليم.

و الواقع هو أن مهمة صنع القرار في المؤسسات التي تسير وفق الضوابط الإدارية ليست من صنع شخص المسير وحده، بل هي مهمة مشتركة بين جميع نواب هذا المسير و رؤساء الدوائر والأقسام التي تتكون منها المؤسسة، بحكم أن القرار الواحد يمكن أن تتأثر به كل الدوائر و الأقسام و المصالح، و يمكنها أن تساهم في إنجاحه.

و لعل أخطر القرارات التي تواجه الهيئة المسيرة هي القرارات المتعلقة بظواهر عدم التأكد بحكم أن المؤسسة هي عنصر في محيط مليء بالمتغيرات، فما يكون مؤكدا في زمن ما قد لا يكون كذلك بعد فترة، و ماهو صحيح في زمن ما قد يكون خاطئا بعد ذلك، و ما يقع خلال فترة قد لا يتكرر بعد فترة أخرى، وإذا تكرر فليس بالضرورة بنفس الكيفية، و هذا ما كان مبررا

لايجاد أساليب لاتخاذ قرارات التسيير بهدف تحقيق الإستغلال الأمثل لمختلف موارد المؤسسة.

أولاً: مفهوم القرار والعوامل المؤثرة على اتخاذه:
يمكن تعريف القرار بأنه عبارة نهائية مرحلة تقييم المنافع النسبية للبدائل المتاحة، بحيث يتم إختيار امثلها لتنفيذه.

ومن العوامل المؤثرة على عملية اتخاذ القرار ما يلي:

- تخمين النتائج المتوقعة لكل بديل من البدائل المتاحة.
- الاحتمالات التي يمكن أن ترتبط بالنتائج.
- الأهداف التي ترغب المؤسسة في الوصول إليها.
- القيود و المحددات البيئية التي يمكن في ضوءها تنفيذ البديل، و من ذلك مدى توفر التمويل اللازم، مدى توفر الكفاءة البشرية، المدة اللازمة، إضافة الى القيود الخارجية المتعلقة بالتقنين العام.
- المعيار الذي يتخذه المسير أو القائم على تقييم البدائل في مقارنة البدائل المختلفة مع بعضها البعض.

و هي عوامل تجتمع كلها أو بعضها في اتخاذ البديل الأمثل.

ثانياً: الطرق المتبعة لمعالجة مشاكل التسيير: هناك العديد من الطرق المساعدة على مواجهة مشاكل التسيير اليومية و اتخاذ القرارات المناسبة بشأنها، و من ذلك ما يلي:

1- إستعمال الخبرة السابقة: تعتبر السيرة الذاتية جداً مهمة في اختيار المسير، حيث نكتسي تجاربه السابقة أهمية بالغة في مساعدته على اتخاذ القرارات المناسبة، إذ يمكن أن يوظف هذه الخبرة في معالجة المشاكل المشابهة لمثيلاتها التي صادفته في الماضي، إذ ينطلق من فلسفة ما صلح في الماضي في ظروف مماثلة يصلح في الحاضر في نفس الظروف.

2- من طريق الملاحظة و الرصد: يمكن للمسير

أن يتخذ قراراته بناء على الملاحظة و رصد آراء الآخرين وتجاربهم في حل المشاكل المثالية، و المسير الناجح هو الذي يكون على اطلاع بتفاصيل ما يحدث بالمؤسسات المشابهة لمؤسسته من حيث النشاط، حيث يسفيد من تجاربها و حتى و إن كانت صفة المناسبة تستوجب السرية في اتخاذ القرارات فإن خبرته و دبلوماسيته تستطيع إنتزاع الكثير من المعلومات حول تلك المؤسسات المنافسة.

3- تطبيق الدراسات النظرية: يمكن للمسير الإستعانة بما كتب و نظّر حول مشاكل مشابهة في كتب الإدارة و التجارة و الصناعة و غيرها، غير أن نتائج ذلك قد لا تكون أكيدة.

4- الطريقة العلمية: و هي أفضل الطرق التي يمكن أن يستند عليها المسير في اتخاذ قراراته، و هي ليست متاحة لأي إداري في المؤسسة، لذا يتحتم على المسير أن يكون مختصاً في مجال الإدارة و التسيير، حتى يكون ملماً بمختلف الطرق العلمية، و هذا ما سنركز عليه في هذا الفصل.

5- الإستعانة بمخاتبة الدراسات: في حالة ما إذا تعذر عليه اتخاذ أي من هذه الطرق، فإنه يمكن اللجوء الى بعض مكاتب الدراسات المتخصصة في إنجاز دراسة تمكنه من اتخاذ القرار المناسب، و لا شك أن هذه المكاتب يمكنها الإستعانة بأي من الطرق السالفة الذكر.

ثالثاً: مراحل عملية اتخاذ القرارات: تمر عملية اتخاذ القرار بمجموعة من المراحل نورددها في ما يلي:

1- التحديد الدقيق للمشكلة: إذ يتعين على متخذ القرار أن يضبط كل جوانب المشكلة و يفهمها فهماً جيداً، من

حيث المكان و الزمان و الإنعكاسات، أي أن يجيب عن ماهية المشكلة، في أي قسم طرح، ماهي محدداتها... الخ، فإذا كانت المشكلة هي التوزيع، فعليه أن يحدد المادة المراد توزيعها، والقسم الذي تنتج فيه، الأماكن التي يراد التوزيع فيها، وسائل النقل المطلوبة و تكاليف النقل، أدوات حفظ المادة من التلف، ثم عليه أن يحدد العناصر المحيطة، فيما إذا كانت منتجات مثيلة منافسة لها، و ماهي أسعار المنتجات المنافسة، و مجال توزيعها..... الخ.

2- تحديد القرارات البديلة: بعد التحديد الدقيق للمشكلة يتطلب الأمر إعداد و تحديد مختلف القرارات الممكنة المتعلقة بالمشكلة و ما ينجر عنها من منافع أو خسائر، و بمعنى آخر، تحديد القرارات التي يمكن الاختيار بينها و التي تكون مجموعة البدائل الممكنة.

3- تحديد حل الأحداث المستقبلية: أي الأحداث التي يمكن أن تلي كل قرار من القرارات البديلة لبعضها البعض، مع مراعاة أن تكون تلك الأحداث مستقلة عن بعضها البعض.

4- جمع البيانات و المعلومات الخاصة بحل بديل: فعملية اتخاذ القرار لكل بديل من البدائل المشار إليها أعلاه تتطلب أن تكون البيانات الخاصة بكل منها متوفرة و وافية، سواء كانت تلك البيانات متعلقة بكميات المواد أو الموارد البشرية أو غيرها من البيانات المهمة و التي تكون حاسمة في اتخاذ القرار.

5- إختيار معيار المفاضلة بين مختلف البدائل: و الذي يمكن على أساسه اتخاذ القرار، بحيث يساعد

هذا المعيار من الوصول الى الهدف الذي من أجله سيكون القرار.

6- إعداد جدول العوائد أو الخسائر أو هما

معاً بحيث نقوم بتلخيص كامل المعطيات من عوائد متوقعة أو خسائر متوقعة أو هما معنا في جدول سيكون قاعدة الانطلاق لاتخاذ القرار، باستعمال الطريقة العلمية للفصل فيها.

رابعاً: خطوات الطريقة العلمية: إن استخدام الطريقة العلمية في حل المشاكل المختلفة للمؤسسة يتم من خلال مجموعة من الخطوات الأساسية و هي:

- **الخطوة الأولى: الملاحظة:** و تعني معايشة المسير للمشكلة، إذ عليه أن يحددها و يحللها الى عناصرها الأولية و يدرسها و يفهمها فهما صحيحا، مع فهم محدداتها و أسبابها و كيفية تصحيحها، و هذا ما يمكنه من تحديد الهدف الذي يجب الوصول اليه، بحيث يكون قابلاً للقياس الكمي.

- **الخطوة الثانية: وضع الفرضيات:** ثاني خطوة في الطريقة العلمية بعد الانتهاء من الخطوة الأولى، هي وضع فرضيات لتفسير المشكلة التي تمت ملاحظتها، و هنا تلعب الثقافة العلمية المتخصصة و الخبرة و بعد النظر دوراً هاماً في ذلك، إذ يتم تحديد الفرضيات و ترتيبها حسب أهميتها و مدى تأثيرها، و استبعاد الأقل أهمية ليتم الرسو على الفرضيات الأساسية التي يتم إختبارها فيما بعد، كما يجب تحديد مدى تذبذب المتغيرات التي يتم تحديدها، و هي إما أن تكون:

- متغيرات مهمة أو متغيرات غير مهمة، حيث يتم إهمال غير المهمة لتحليل المشكلة و الإحتفاظ بالمهمة فقط، و إما أن تكون:

• متغيرات ممكن التحكم فيها أو متغيرات لا يمكن التحكم فيها، حيث يتم التعامل معها حسب الحالة.

- **الخطوة الثالثة: تصميم الفروض:** أي وضع الفروض في إطار كمي، أي وضع الفروض و صياغتها في شكل نموذج رياضي يأخذ أحد أشكال المسائل المعروفة في بحوث العمليات أو الإقتصاد القياسي أو غيرهما، وهذا قبل أن تتم الإجابة على مجموعة من تساؤلات منها:

- مدى أهمية كل متغير من المتغيرات في المسألة.
- مدى تأثير كل منها على مقياس الكفاءة.
- قوة كل متغير من المتغيرات المحددة في النموذج.
- معاملات و إشارات كل متغير

و يتم ذلك كله بفضل الفهم الجيد للمشكلة و الإلتزام الكامل بالخطوات السابقة.

- **الخطوة الرابعة: اختبار الفرضيات:** يتم ذلك من خلال بيانات و معلومات سابقة أو مشاهدة أو عن طريق تعميم الملاحظة و القياس أو عن طريق التجربة أو باستخدام إحدى طرق اختبار الفرضيات المعروفة في الطرق الإحصائية.

- **الخطوة الخامسة: اختبار النموذج الأمثل:** بالوصول الى هذه المرحلة يعني أن المشكلة صارت قيد الحل، إذ أن اختبار النموذج و قبوله يعني أنه حصل فهم كامل للمشكلة و صار بالإمكان توظيف إحدى طرق الحل لإيجاد النتائج و الوصول الى الهدف، وهي متاحة عن طريق المعلوماتية، إذ أن تكييف المسألة و جعلها تخضع لنموذج محدد يجعلنا نطبق البرنامج الآلي المكيف حسبها، للحصول على النتائج.

- **الخطوة السادسة: وضع الحل الأمثل المتوصل اليه موضع التنفيذ:** إذ أن الحل الأمثل المتوصل اليه و الذي يجب

أن يكون متسجما و غير متناقض مع الواقع، يعطى في شكل قابل للتنفيذ في صيغة توصيات أو أوامر للمسؤولين على التنفيذ في الدوائر و الأقسام المختلفة للمسألة.

و إذا ما تم إحترام هذه الخطوات بشكل دقيق فإنه من المستبعد أن نجد عوائق داخلية تمنع تنفيذ الحل، غير أنه في أحيان قليلة نجد بعض العوائق التي تحد متخذي القرار من التنفيذ خاصة إذا لم يتم إدخالها في النموذج لصعوبة تكييفها، و من ذلك ما يلي:

- **تأثير المحيط العام للمؤسسة:** فبما أن المؤسسة محلية في محيط كامل يؤثر فيها و تتأثر به، فإنه يكون للظروف الإقتصادية و الإجتماعية و السياسية العامة تأثير عليها، كما أن المؤسسة قد لا تكون وحيدة في السوق، فيكون لمثيلاتها المنافسة تأثيرا واضحا على قراراتها.

- **تأثير وضعها الداخلي:** للوضع الداخلي للمؤسسة أهمية بالغة في الوصول الى أهدافها بتنفيذ البرامج التي تعطيها الطريقة العلمية، و من ذلك علمية هيكلها التنظيمي و كفاءة العمالة و الإدارة، و سرعة الإستجابة للطلبات و خلوها من التزاعلات بين النقابات و الإدارة و خلوها من صور الفساد... الخ، و لكل ذلك تأثير على الأهداف المراد الوصول اليها و التي تتيحها الطريقة العلمية.

- **تأثير المسير:** لشخصية المسير أهمية كبيرة في تحسيد البرامج المتوصل اليها بالطريقة العلمية، فالمسير قد يكون شخصية قوية أو ضعيفة أو بين هذه و تلك، و طبقا لذلك فقد يكون مجازفا أو حذرا، متسرعاً أو متهوراً أو مترشداً، و كل ذلك يؤثر على تنفيذ القرار.

- **تأثير ظروف القرار:** قد يبنى القرار وفقا لنموذج لم يأخذ بعين الإعتبار ظروف الطلب و أوقاته، فيعطي

نتائج لزيادة الإنتاج في وقت يقل فيه الطلب، أو نتائج بتخفيض حجم الإنتاج في وقت يزداد فيه الطلب، الشيء الذي يزيد من تعميق مشكلة المؤسسة عوض حلها.

- **تأثير منحصر الزمن:** قد يكون هناك متسعا من الوقت لتنفيذ القرار و يكون لذلك نتائج جيدة، غير أنه في بعض الأحيان يتخذ القرار في ظرف ضيق الوقت و بالتالي قد لا يكون هناك متسعا من الوقت لدراسة البدائل و إختيار أحسنها.

خامسا: حالات اتخاذ القرارات: هناك ثلاث حالات أساسية تصادف المسير في اتخاذ قراراته، وهي حالة التأكد و حالة عدم التأكد و حالة المجازفة.

1- **اتخاذ القرارات في حالة التأكد:** حالة التأكد تفترض أن يكون المسير مدركا إدراكا كاملا بكل البدائل و بنتائج كل بديل من تلك البدائل، بحيث يكون العائد (أو الخسارة) الناجم عن كل بديل معروفا و محدد، و في هذه الحالة يتم إستخدام ما يسمى بالنماذج المحددة.

و في حالة ظروف التأكد تصادف الإمكانيات التالية:

أ- **وجود عائد واحد لكل بديل:** في هذه الحالة يكون لدينا عائد واحد محدد لكل بديل من البدائل المعروضة، حيث يتم الإعتماد على ما يسمى مصفوفة العائد أو جدول العائد، حيث يكون إستنباط القرار جد سهل كما في المثال التالي:

مثال 9-1: شركة طيران تقوم باستغلال أسطول يضم مجموعة من الطائرات، و نظرا لتقادم هذه الطائرات، قامت الشركة بإجراء دراسة من أجل رفع عائدها السنوي، حيث أضفت هذه الدراسة الى ما يلي:

- الإستمرار في العمل كما هو حال الأسطول يجعلها تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 200 مليون دينار.

- تحديث نفس الطائرات و تجهيزها بأجهزة حديثة يجعل الشركة تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 250 مليون دينار.

- الإستغناء عن طائرات الأسطول و إستبدالها بأخرى جديدة من الطراز الحديث و بنفس العدد، يجعلها تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 240 مليون دينار.

على إفتراض أنه لا توجد أية عوائق تحد من إمكانية تحقيق أي بديل من هذه البدائل، فما هو القرار الأمثل الذي يجب أن تتخذه إدارة الشركة؟.

للإجابة نقوم بإيجاد ما يسمى بجدول القرار (مصفوفة القرار) وهو:

رقم البديل	البديل	الربح المتوقع بآلاف الدينارات
1	الإستمرار في تشغيل الأسطول كما هو	200
2	الإحتفاظ بالأسطول مع تحديث التجهيزات	250
3	إستبدال كل الأسطول بأسطول جديد	240

جدول 9-1

ملاحظة جدول القرار، يكون من البداية إختيار البديل الثان باعتبار أنه يؤدي الى أعلى ربح، أي الإحتفاظ بنفس الطائرات مع تحديث تجهيزاتها، و هذا ما يحقق لها ربحا سنويا يقدر بـ 250 ألف دينار.

ب- **وجود أهداف متعددة لكل بديل:** في هذه الحالة يكون لكل بديل عدة حالات تسمى بحالات الطبيعة، بحيث يكون لكل بديل عدة عوائد حسب حالات الطبيعة هذه، و يمكن للمثال التالي أن يوضح ذلك:

مثال 9-2: بافتراض نفس الشركة، أبقّت على نفس البدائل، غير أنّها تريد تحقيق الأهداف التالية:

- زيادة الأرباح السنوية.

- زيادة عدد المسافرين على متن طائراتها.

- زيادة عدد الخطوط التي تشتغل عليها.

حيث أنّها تولي عناية متفاوتة لكل هدف من هذه الأهداف بدرجات احتمالية تبلغ 50% للهدف الأول، 10% للهدف الثاني و 40% للهدف الثالث.

فإذا كانت الأرباح السنوية و عدد المسافرين و عدد الخطوط المنتظرة حسب كل بديل كما في الجدول التالي:

الحالات		الربح السنوي ألف دينار	عدد المسافرين ألف مسافر	الخطوط
الإحتمال		0.5	0.1	0.4
3	الإستمرار في تشغيل الأسطول كما هو	200	1000	30
	الإحتفاظ بالأسطول مع تجديد التجهيزات	250	1300	50
	إستبدال كل الأسطول بأسطول جديد	240	1200	40

جدول 9-2

المطلوب: ما هو البديل الأفضل الذي يجب أن تختاره الشركة؟

لإستنباط البديل الأحسن نقوم بضرب قيم كل بديل في الإحتمال المرافق و نوجد الوسط المرجح بالإحتمال أي ما يسمى بالقيمة المتوقعة (أنظر المعادلة 9-1)، ونختار البديل ذي أكبر وسط مرجح، و ذلك كما يلي:

البديل	العملية	الوسط المرجح
البديل الأول	$-30 \times 0.4 + 1000 \times 0.1 + 200 \times 0.5$	212
البديل الثاني	$-50 \times 0.4 + 1300 \times 0.1 + 250 \times 0.5$	275
البديل الثالث	$-40 \times 0.4 + 1200 \times 0.1 + 240 \times 0.5$	256

جدول 9-3

يلاحظ أن البديل الثاني هو الفائز، حيث يبلغ الوسط المرجح بالإحتمال 275 و هو أكبر وسط، أي على الشركة أن تحتفظ بالأسطول مع تجديد تجهيزاته، و هذا ما يسمح لها بالحصول على أرباح تقدر بـ 250 ألف دينار، و زيادة عدد المسافرين إلى 1300000 و زيادة عدد الخطوط الشغالة إلى 50 خط.

2- إتخاذ القرارات في حالة عدم التأكد: حالة عدم التأكد هي الحالة التي يكون فيها متخذ القرار غير متأكد من احتمالات الأحداث المتعددة، و ذلك بسبب عدم وجود تجارب في الماضي تمكنه من تقدير هذه الاحتمالات، و في هذه الحالة يمكنه أن يتخذ قراره بناء على أحد المعايير التالية:

أ- معيار التفاؤل الكامل: و يسمى أيضا معيار أعظم الأعظم (MaxiMax)، أو معيار هرويكز (HURWICZ)، و فيه يتم إختيار البديل الذي يحقق أكبر عائد أو أكبر ربح ممكن، أي يتم تحديد أحسن عائد لكل إستراتيجية ثم نأخذ أكبر عائد من تلك العوائد لكي نحدد الإستراتيجية المثلى.

ب- معيار التشاؤم: و يسمى أيضا معيار أقصى الأدنى (MaxiMin) أو معيار والد (WALD)، في هذا المعيار يتم إختيار البديل بنوع من التشاؤم فيختار البديل الذي يعطي أقل عائد أو ربح، أي أننا نحدد أولا أسوأ العوائد لكل إستراتيجية، ثم نأخذ الأحسن من تلك العوائد لإختيار الإستراتيجية المثلى حسب هذا المعيار.

ت- معيار أدنى الأقصى: (MiniMax) و يسمى أيضا معيار سافاج (SAVAGE)، حيث يتم إختيار أكبر

العوائد لكل بديل ثم نختار أقل هذه العوائد لإختيار الإستراتيجية المثلى.

ث- **معييار أحسن الأدنى (MiniMin)** أو معيار التشاؤم الكامل، في هذه الحالة يتصرف المسير بتشؤم كبير، حيث يقوم باختيار أقل عائد أو ربح لكل بديل ثم يختار الأقل منها.

مثال 9-3: مصنع ينتج الأقمشة الراقية بآلات من تكنولوجيا متوسطة، بعدما أصبحت له سمعة مقبولة في السوق أصبح يسعى لتعزيز عوائده المالية، لأجل ذلك قرر إجراء دراسة تساعد على اتخاذ قرار يصل به لتعظيم عوائده، فتم تحديد البدائل التالية:

- الإبقاء على المصنع كما هو.
 - إدخال تعديلات على الآلات و إدخال تحسينات جديدة.
 - إستبدال كل الآلات بآلات جديدة ذات تكنولوجيا حديثة.
- كما تم تحديد ثلاثة مجالات لنشاطه التسويقي، و ذلك إما:
- بالتسويق المحلي فقط
 - بالتسويق المحلي و الدولي
 - بالتسويق الدولي فقط

و قد قدر العائد المتوقع حسب كل بديل من البدائل و حسب كل حالة من حالات التسويق كما يلي:

العائد بملايين الدينارات

الحالات	حالة 1	حالة 2	حالة 3
البديل	تسويق محلي فقط	تسويق محلي ودولي	تسويق دولي فقط
الإبقاء على المصنع كما هو	20	17	23
إجراء تعديلات وتحسينات على الآلات	14	19	15
إستبدال الآلات بآلات حديثة	18	9	31

جدول 9-4

المطلوب: أوجد القرار المناسب حسب كل معيار من معايير اتخاذ القرارات.

الإجابات:

أ- **بمعيار التفاؤل الكامل (MaxiMax)** نقوم بتحديد أحسن عائد لكل استراتيجية ثم نأخذ أعظم عائد من هذه العوائد:

- أقصى عائد للبديل الأول هو: 23
- أقصى عائد للبديل الثاني هو: 19
- أقصى عائد للبديل الثالث هو: 31

نلاحظ أن أقصى عائد من هذه العوائد يعود للبديل الثالث وهو 31 مليون دينار، و بالتالي فإن القرار المناسب بمعييار التفاؤل الكامل هو أن يستبدل كل الآلات بأخرى حديثة و يسوق المنتج بالخارج فقط.

ب- **بمعيار التشاؤم (MaxiMin)** نحدد أقل العوائد لكل إستراتيجية ثم نأخذ أعظمها كما يلي:

- أقل عائد للبديل الأول هو: 17
- أقل عائد للبديل الثاني هو: 14
- أقل عائد للبديل الثالث هو: 9

نلاحظ أن أعظم هذه العوائد هو 17 مليون دينار و يعود للبديل الأول، أي أن القرار المناسب بهذا المعيار هو إبقاء المصنع كما هو على وضعه مع تسويق المنتج داخليا و خارجيا.

ج- **معييار أحسن الأقصى (MiniMax)** حيث نحدد العوائد العظمى لكل بديل و نأخذ أدناها.

- أقصى عائد للبديل الأول هو: 23
- أقصى عائد للبديل الثاني هو: 19
- أقصى عائد للبديل الثالث هو: 31

نلاحظ أن أدنى عائد من هذه العوائد هو 19 مليون دينار ويعود للبديل الثاني، أي أن القرار وفق هذا المعيار هو إدخال تعديلات وتحسينات على آلات المصنع مع التسويق الداخلي والخارجي للمتزوج.

د- معيار أدنى الأدنى: (MiniMin)، حيث نحدد العوائد الدنيا لكل بديل ونختار أدناها كما يلي:

- أقل عائد للبديل الأول هو: 17
- أقل عائد للبديل الثاني هو: 14
- أقل عائد للبديل الثالث هو: 9

نلاحظ أن أدنى هذه العوائد هو 9 مليون دينار ويعود للبديل الثالث، أي على المصنع أن يستبدل كل الآلات والمعدات ويسوق منتوجه داخليا وخارجيا وفق هذا المعيار.

والجدير بالذكر أنه يمكن أن يستخدم معيار التفاؤل التام والتشاؤم التام في إستنتاج أحسن إستراتيجية وهذا بالإعتماد على وزن احتمالي لكل منهما، فإذا فرضنا أن الوزن الاحتمالي للتفاؤل التام هو 0.6 أي 60% والوزن الاحتمالي للتشاؤم التام هو 0.4 أي 40% فإنه يمكننا إستنتاج القرار باستخراج أعظم عائد لكل بديل ثم أدنى عائد لكل بديل ثم حساب الوسط الحسابي المرجح لهما وذلك كما يلي:

الاحتمال	أعظم عائد	أدنى عائد	العمليات	الوسط المرجح
	0.6	0.4		
البديل الأول	23	17	$-17 \times 0.4 + 23 \times 0.6$	20.6
البديل الثاني	19	14	$-14 \times 0.4 + 19 \times 0.6$	17
البديل الثالث	31	9	$-9 \times 0.4 + 31 \times 0.6$	22.5

جدول 5-9

معلوم أن الوسط المرجح عبارة عن مجموع القيم مضروبة في احتمالاتها مقسومة على مجموع الاحتمالات و مجموع الاحتمالات هنا يساوي الواحد.

و واضح أن الوسط الأكبر هو 22.5 و يعود للبديل الثالث، ولإختيار الحالة الموافقة، يمكن ملاحظة العائد الأكبر في هذا البديل و هو 31 مليون دينار، و بالتالي فإن القرار المناسب هو تجديد كل الآلات و اعتماد التسويق الخارجي فقط.

يبقى أن نشير الى أن إختيار المعيار المناسب تتحكم فيه عوامل كثيرة داخلية و خارجية، تجعل متخذ القرار يفضل معيارا على معيار آخر، بفضل إطلاعهم على تفاصيل واقع المؤسسة والأهداف التي يريد الوصول اليها، و بفضل إلمامهم بالمحيط الخارجي لها أي بوضع الإقتصاد العام و بظروف العرض والطلب خاصة على السلع المنافسة من حيث الكميات والأسعار، و على طبيعة الزبائن و فترات الذروة في الطلب وفترات تدني الطلب، و بالقوانين المتعلقة بالنظام البنكي و مدى مرونته و غير ذلك من العوامل التي تجعله يخوض المفاضلة بين المعايير و استنباط القرار المناسب.

3- إتخاذ القرارات في ظروف المجازفة: اتخذ القرار في ظروف المجازفة أو المخاطرة، يتم في ظروف عدم المعرفة التامة لحالات الطبيعة الممكن حدوثها، حيث لا تتوافر سوى معلومات في شكل احتمالات وقوع كل حالة بناء على تخمينات يمكن أن تكون مستقاة من الماضي أو بناء على حالات مماثلة وقعت في مؤسسات أو شركات أو إدارات مماثلة، و في هذه الحالة يتم الإعتماد أساسا على بعض قواعد الاحتمالات خاصة التوقع.

و في هذه الظروف يمكن لمتخذ القرار أن يلجأ الى أحد الطرق التالية:

أ- **طريقة القيمة المتوقعة:** وتسمى أيضاً معيار بايز (BAYES) حيث يتم ذلك وفقاً للخطوتين التاليتين:

- يتم حساب العائد المتوقع من كل قرار بديل بإيجاد مجموع العوائد مضروبة في الاحتمالات المقابلة لها. وفكرة القيمة المتوقعة تعود الى فكرة الوسط الحسابي المرجح بالأوزان، حيث نعتبر الاحتمالات عبارة عن أوزان، حيث يحسب الوسط الحسابي المرجح بالاحتمالات كما يلي:

$$\bar{X} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} \quad 1-9$$

حيث: X_i عبارة عن العوائد (أو الخسائر، التكاليف).
 P_i عبارة عن الاحتمالات المقابلة.

مع: $I=1,2,3,\dots,n$

و حيث أن مجموع الاحتمالات المتعلقة بالظاهرة يساوي الواحد (100%)، فتصبح القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي المرجح) عبارة عن مجموع العوائد في احتمالاتها.

- يتم اختيار أكبر مجموع محصل عليه في حالة التعظيم ليدل على أكبر عائد متوقع، و بالتالي يتم اختيار القرار المناسب، (أو يتم اختيار أصغر قيمة متوقعة في حالة التدنئة)

مثال 4-9: بالعودة الى المثال 3-9 و بافتراض أنه تم إعطاء الاحتمالات التالية لكل حالة: 0.5 للحالة الأولى، 0.30 للحالة

الثانية و 0.20 للحالة الثالثة، أي أن جدول المعلومات يصبح على النحو:

الحالات	حالة 1	حالة 2	حالة 3
الإحتمالات	0.50	0.30	0.20
البديل الأول	20	17	23
البديل الثاني	14	19	15
البديل الثالث	18	9	31

جدول 6-9

المطلوب: ما هو البديل الأفضل بطريقة القيمة المتوقعة؟
فإن القيمة المتوقعة لكل بديل تكون كما يلي:

باستعمال المعادلة 1-9 نوجد القيمة المتوقعة لكل بديل كما هي في الجدول التالي:

القيمة المتوقعة		
19.7	$=23 \times 0.20 + 17 \times 0.30 + 20 \times 0.50$	القيمة المتوقعة لعائد البديل الأول:
15.7	$=15 \times 0.20 + 19 \times 0.30 + 14 \times 0.50$	القيمة المتوقعة لعائد البديل الثاني:
17.9	$=31 \times 0.20 + 9 \times 0.30 + 18 \times 0.50$	القيمة المتوقعة لعائد البديل الثالث:

جدول 7-9

يلاحظ أن أعلى قيمة متوقعة للعائد هي 19.7 و تعود للبديل الأول و بالتالي فإنه يتم اختيار هذا البديل.

ب- **طريقة المعيار غير الخافئ أو طريقة الاحتمالات المتساوية:** و تسمى أيضاً طريقة لابلاس (LAPLACE)، و هي تقوم على أساس فكرة أنه ليس لدينا دليل موضوعي للتوزيع الاحتمالي لحالات الطبيعة المختلفة، حيث نجعلها متساوية الحظوظ بإعطائها احتمالات متساوية، فإذا كانت لدينا ثلاث حالات نجعل احتمال كل حالة الثلث (1/3)، و إذا كانت لدينا أربع حالات نجعل احتمال كل حالة الربع (1/4) الخ.

مثال 9-5: بالعودة الى المثال 9-3 أوجد أحسن بديل بطريقة المعيار غير الكافي.

بما أنه لدينا ثلاث حالات فنعطي لكل حالة احتمال يساوي الثلث، ثم نحسب متوسط العائد المتوقع أي الوسط المرجح بالاحتمالات كما يلي:

الحالات	حالة 1	حالة 2	حالة 3	العمليات	العائد المتوقع
الإحتمال	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
البديل الأول	20	17	23	$-23 \times 0.33 + 17 \times 0.33 + 20 \times 0.33$	20
البديل الثاني	14	19	15	$-15 \times 0.33 + 19 \times 0.33 + 14 \times 0.33$	16
البديل الثالث	18	9	31	$-31 \times 0.33 + 9 \times 0.33 + 18 \times 0.33$	19.33

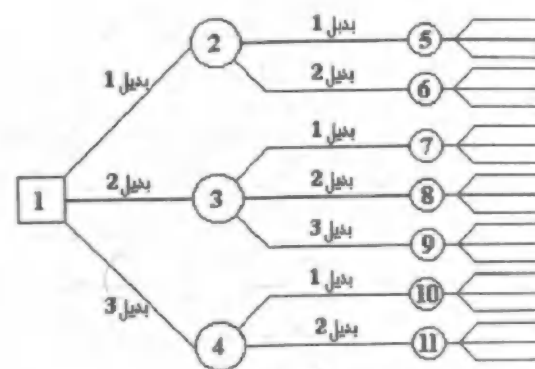
جدول 8-9

نلاحظ أن أكبر قيمة متوقعة تعود للبديل الأول، والحالة الموافقة هي الحالة الثالثة، أي الإبقاء على وضع المصنع كما هو مع التسويق الدولي فقط.

4- شجرة القرارات: إن حالات القرارات التي تطرقنا لها سواء في ظروف التأكد أو في ظروف عدم التأكد أو في ظروف المجازفة هي قرارات من مرحلة واحدة و بالتالي فهي ساكنة من حيث الزمن، غير أن متخذ القرار قد تصادفه حالات تستلزم منه اتخاذ قرارات متتابعة، إذ بعد أن يرسو على قرار معين، يستلزم منه الأمر اتخاذ قرار موال بالاعتماد على الأول، ثم بعد اختيار القرار الثاني، قد يستلزم الأمر منه أيضا اتخاذ قرار موال ثالث وهكذا...، يجد نفسه اتخذ سلسلة من القرارات المتتابعة لأجل تعظيم العائد أو الأرباح أو تدنئة التكاليف أو الخسائر، وهذا ما يعبر عنه بنموذج القرارات المتتابعة والمعبر عنه أيضا بشجرة القرارات.

فشجرة القرار عبارة عن بيان متفرع، تعبر فروعها عن الإختيارات الممكنة و التي يجب على المسير أن يفاضل بينها، تفصل بين كل فرع و فرع موال عقدة و هي عبارة عن نقطة أو دائرة، و تتضمن فروع الشجرة التقديرات الإحتمالية والعوائد أو الخسائر، حسب ما يتطلبه الأمر، كما يظهر ذلك في الشكل الموال:

نموذج لشكل شجرة القرار



شكل 9-1

و شجرة القرار يمكن أن تكون محدة يكون فيها البديل الممكن و العائد معروفين تماما، حيث يتخذ فيها قرار واحد فقط، و قد تكون شجرة القرار ذات مراحل متعددة، حيث تحتوي على إمكانيات لقرارات متتابعة.

لتوضيح شجرة القرار بشكل جيد أورد المثال المعدل التالي المقتولب، عن الأستاذ الدكتور محمد كعبور من كتابه أساسيات بحوث العمليات نماذج و تطبيقات و هو مثال يفني جيدا بالمتطلب البيداغوجي و هو كالتالي:

مثال 9-7: شركة وطنية لإنتاج حقائب المدرسية تريد إنشاء سلسلة جديدة لإنتاج حقائب السفر، وهذا ما يتطلب منها إستيراد آلة جديدة يتم تركيبها لإنتاج حقائب السفر هذه. وقد كان للشركة خيارين، إما شراء آلة فرنسية الصنع X_1 بتكلفة 30 ألف دينار، أو آلة ألمانية الصنع X_2 بتكلفة 45 ألف دينار.

إن الطلب على المنتج مستقبلا غير مؤكد، إذ تتوقع الشركة إما أن يكون:

- الطلب مرتفعا و باحتمال 0.5 أي 50%

- أو الطلب منخفضا و باحتمال 0.5 أي 50% أيضا

وقامت الشركة بتخمين العوائد وإحتمالات الطلب وبدائل التصرف خلال السنتين المقبلتين على النحو التالي و كما يوضحه الشكلان 2-9 و 3-9.

فبالنسبة لإحتمالات الطلب توقعت ما يلي:

- إذا كان الطلب خلال السنة الأولى منخفضا فإن

إحتمال أن يكون الطلب:

منخفضا في السنة الموالية هو 0.7 أي 70%

أن يكون مرتفعا هو 0.3 أي 30%.

- إذا كان الطلب مرتفعا في السنة الأولى، فإن إحتمال أن يكون:

منخفضا في السنة الثانية هو 0.4 أي 40%

أن يكون مرتفعا في السنة الثانية هو 0.6 أي 60%.

أما بالنسبة لبدائل التصرف فإنه تم تخمين ما يلي:

- إذا تم شراء الآلة الفرنسية في السنة الأولى و كان الطلب على الحقائب منخفضا خلال هذه السنة فإن الشركة تستمر في تشغيل هذه الآلة أيضا خلال السنة الثانية.

و كان الطلب مرتفعا خلال هذه السنة فإن الشركة سيكون أمامها بديلان للتصرف في نهاية السنة الأولى هما:

إما الإستمرار في تشغيل هذه الآلة دون توسع

أو التوسع بشراء تجهيزات جديدة بما قيمته 15 ألف دينار كتعزيز للطاقة الإنتاجية لهذه الآلة.

- إذا تم شراء الآلة الألمانية في السنة الأولى، و كان الطلب منخفضا خلال هذه السنة فسيكون أمام الشركة بديلان للتصرف هما:

إما أن تجري بعض التعديلات على هذه الآلة بغرض تخفيض طاقتها الإنتاجية الأمر الذي يكلف 10 آلاف دينار.

أو الإبقاء على هذه الطاقة بدون تغيير.

- إذا تم شراء الآلة الألمانية في السنة الأولى و كان الطلب مرتفعا خلال هذه السنة، فسيكون أمام الشركة أيضا بديلان للتصرف هما:

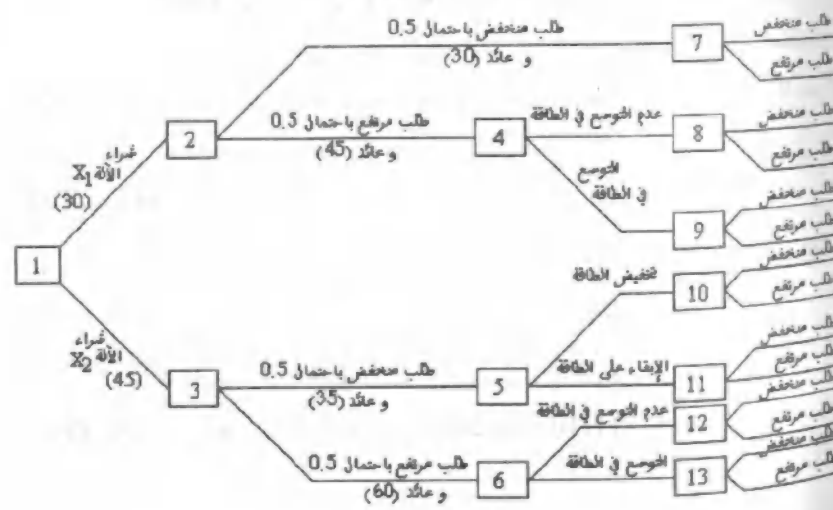
إما أن تتوسع بشراء تجهيزات جديدة قيمتها 20 ألف دينار،

أو لا تتوسع و تبقى تنتج بنفس الطاقة.

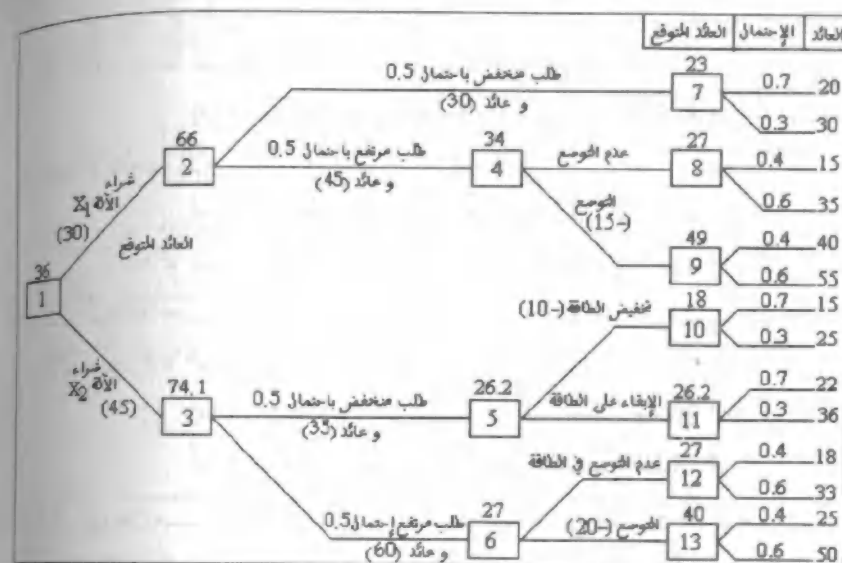
المطلوب: ما هي سلسلة القرارات التي يجب أن تتخذها الشركة بالشكل الذي يجعل أرباحها أكبر ما يمكن؟.

البدائل المقترحة للتصرف

شكل 2-9



و يظهر في الشكل 9-3 بقية المصاريف و الاحتمالات إضافة الى العوائد المتوقعة.



شكل 9-3

نقوم بإيجاد العوائد عند مستويات القرار المختلفة كما يلي:

أولاً: عند المستوى الرابع أي عند النقاط 7، 8، 9، 10، 11، 12، و 13.

حيث قمنا بتقييم العوائد المتوقعة، أي الوسط بإيجاد مجموع العوائد في احتمالاتها مقسمة على مجموع الاحتمالات أي مقسمة على الواحد، فعلى سبيل المثال:

العائد المتوقع عند النقطة 7 هو:

$$23 = \frac{30 \times 0.3 + 20 \times 0.7}{0.3 + 0.7} \quad \text{أي:}$$

العائد المتوقع عند النقطة 7 هو: 23 ألف دينار

و بالمثل نجد كل العوائد المتوقعة عند النقاط 8، 9، 10، 11، 12، و 13:

العائد المتوقع عند النقطة 8 هو: 27 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 9 هو: 49 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 10 هو: 19.7 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 11 هو: 26.2 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 12 هو: 27 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 13 هو: 40 ألف دينار

ثانياً: عند المستوى الثالث أي عند النقاط 4، 5، 6:

العائد المتوقع عند النقطة 4:

في حالة التوسع هو: 49-15=34 ألف دينار

في حالة عدم التوسع هو: 27 أي نفس العائد النقطة 8

واضح أننا نختار أعلى عائد عند هذه النقطة و هو 34 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 5:

في حالة تخفيض طاقة الآلة 2 هو: 10-19.7=9.7 ألف دينار

في حالة الإبقاء على الطاقة هو: 26.2 أي نفس العائد عند النقطة 11

واضح هنا أيضاً أننا نختار أعلى عائد عند هذه النقطة و هو 26.2 ألف

دينار

العائد المتوقع عند النقطة 6:

العائد في حالة التوسع هو: 40-20=20 ألف دينار

العائد في حالة التوسع هو: 27 ألف دينار، أي نفس العائد عند

النقطة 12

و نختار أعلى عائد و هو 27 ألف دينار.

ثالثاً: عند المستوى الثاني أي عند النقطتين 2 و 3:

العائد المتوقع عند النقطة 2 و هو الوسط المرجح بالاحتمالات أي:

$$66 = 0.5 \times (45 + 34) + 0.5 \times (30 + 23)$$

العائد المتوقع عند النقطة 3 و هو أيضاً الوسط المرجح بالاحتمالات

أي:

$$74.1 = 0.5 \times (60 + 27) + 0.5 \times (35 + 26.2)$$

رابعاً: عند المستوى الأول أي عند النقطة 1:

العائد المتوقع في حالة شراء الآلة الأولى هو:

$$36 = 30 - 66$$

العائد المتوقع في حالة شراء الآلة الثانية هو:

$$29.1 = 45 - 74.1$$

أكبر عائد عند هذه النقطة هو 36 ألف دينار.

و كل هذه العمليات تظهر جلياً في شكل الشجرة أعلاه، و هو ما يسمح لنا باتخاذ طريق يؤدي بنا القرار الأمثل.

واضح أن الإدارة سوف تشتري الآلة الفرنسية بـ 30 ألف دينار في السنة الأولى، ثم تنظر إذا ما كان الطلب خلال هذه السنة منخفضاً فيجب عدم إجراء تغييرات و تستمر الآلة في التشغيل خلال السنة الثانية، أما إذا كان الطلب مرتفعاً خلال السنة الأولى فيجب عليها إجراء توسع في الطاقة الإنتاجية بدء من السنة الثانية، و هذا يؤدي بها للحصول على أعلى عائد متوقع تحقيقه و هو 36 ألف دينار.

لا شك أن شجرة القرار تسمح لنا باختبار كل النتائج، الإيجابية منها أو غير الإيجابية، كما تسمح بمناقشة كل بدائل القرارات و ما ينجر عنها، الشيء الذي ينجر عنه اتخاذ قرارات سليمة.

تمارين

- تمرين 1: إعط تعريفاً للقرار و حدد العوامل المؤثرة فيه.
- تمرين 2: حدد مراحل عملية اتخاذ القرار و اشرحها.
- تمرين 3: إعط تصوراً لمسألة يراد اتخاذ القرار بشأنها بمؤسسة ما في ظروف التأكد، مع إعطاء حل لها.
- تمرين 4: إعط تصوراً لمسألة يراد اتخاذ القرار بشأنها في ظروف عدم التأكد، مع إعطاء حل لها بمختلف معايير اتخاذ القرار.
- تمرين 5: قررت شركة إستكشاف بترولية تقديم مبلغ 70 ألف دينار لصاحب أرض وقع عليها إختيار الإستكشاف، كما تقدم له مبلغاً إضافياً يقدر بـ 700 ألف دينار إذا ما تم إكتشاف وجود البترول فعلاً.
- إن إهتمام الشركة بالبحث في هذه الأرض جعل صاحبها يعتقد أن ذلك مؤشر جيد على وجود البترول بالفعل، لذا فكر في إكتشاف البترول بنفسه، و هذا ما يجعله يوقع عقد مع أحد مكاتب الخبرة و الإستكشاف بتكلفة أولية تصل إلى 200 ألف دينار يدفعها حتى و إن لم يكتشف البترول، و ما دفع صاحب الأرض إلى ذلك هو أنه يتوقع عائداً قدره 3 مليون دينار إذا ما إكتشف البترول.

المطلوب:

- أ- أوجد مصفوفة القرار
- ب- ما هو القرار المتخذ بمختلف معايير اتخاذ القرار.
- ج- إذا كان احتمال وجود البترول هو 0.55 ما هو القرار المتخذ.
- د- بالإعتماد على شجرة القرار و باحتمال 0.55 على وجود البترول ما هو القرار المتخذ.
- تمرين 6: مصنع للجبين يمكنه إنتاج 3 أنواع أساسية هي: الجبن العادي، الجبن المتوسط الجودة، الجبن العالي الجودة. من خلال

جبن عادي	جبن متوسط الجودة	جبن عالي الجودة
10-	0	90-
20-	40	45
70	55	40-
90	50	55-

ج- أوجد القرار المناسب بمعبّر الاحتمالات المتساوية.

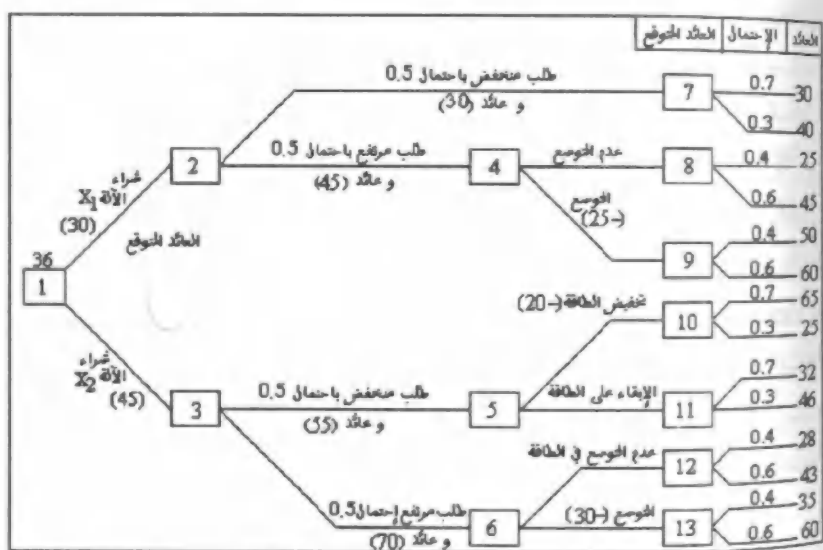
د- أوجد القرار المناسب باستخدام شجرة القرار

مصروفة العائد بآلاف الدينارات للتوليفة الواحد.

النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث	النوع الرابع
2	2.5	2	1.5
5	8	7	4
10	12	9	8
20	18	18	16

د- أوجد القرار المناسب باستخدام معيار الاحتمالات المتساوية.

تمرين 8: بالنظر الى المثال 7-8 و من خلال شجرة القرار التالية حدد مسار القرار السليم.



الفصل العاشر

مدخل لنظرية البيانات.

تستخدم نظرية البيانات في الكثير من الحياة العملية وخاصة في مجالات التسيير الأمثل للموارد، كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز والكهرباء والطرق...، وأعمال البترول وإنجاز المشاريع... الخ، فهي واحدة من بين أهم النظريات ذات الفعالية في حل الكثير من المسائل الحقيقية التي تدرسها بحوث العمليات.

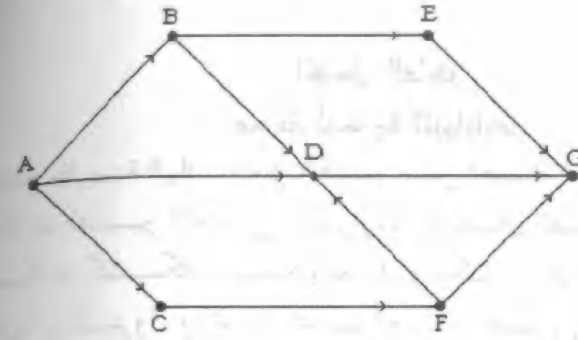
وقد بدأ ظهور نظرية البيانات من خلال أول مطبوعة ظهرت سنة 1936 لصاحبها DENES KONIG والتي تحمل عنوان "Theorie der endlichen und unendlichen graphen"، وفي سنة 1958 أظهر CLAUDE BERGE نظرية البيانات وتطبيقاتها، وقد تم تطوير هذه النظرية خاصة بعد سنة 1971 في كل من فرنسا والمجر والولايات المتحدة والاتحاد السوفياتي (Robert Faure. P:53)

أولاً: مفاهيم عامة:

1- **تعريف البيان:** البيان عبارة عن مجموعة من الخطوط المتصلة عن طريق نقط أو دوائر تسمى بالقمم، يعبر كل خط عن إختيار معين، و عليه فالبيان يتكون من مجموعتين من المحددات:

- المجموعة X تسمى بالقمم و هي عبارة عن نقاط أو دوائر صغيرة.

- المجموعة U عبارة عن خطوط أو أسطر تربط كل قمتين، كما يظهر في الشكل 1-10 أدناه.



شكل: 1-10

و يعبر عن البيان بالصيغة: $G = (X, U)$ إذا كانت مجموعة الخطوط أو الأسطر موجهة أي في شكل أسهم من القمة i الى القمة j أو العكس، فإنها تسمى بالأقواس (ARCS)، و يسمى البيان حينئذ بالبيان الموجه. أما إذا كانت مجموعة الخطوط غير موجهة، فإن تلك الخطوط تسمى بالأحرف (ARETE)، و يسمى البيان حينئذ بالبيان غير الموجه.

2- **القمة:** (جمع قمة) هي النقاط التي تنطلق منها أو تصل إليها الخطوط الموجهة (الأقواس) أو غير الموجهة (الأحرف)، فالنقاط A, B, C, D, E, F, G في الشكل 1-10 عبارة عن قمم للبيان.

و تكتب مجموعة القمم X كما يلي:

$$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

3- **الحرف (Arete):** هو خط غير موجه بين قمتين، وهو يكافئ قوسين متعاكسين، كما يظهر ذلك في الشكل 6-10.

4- **القوس (Arc):** عبارة عن خط موجه أو سهم، يصل بين طرف ابتدائي (قمة الانطلاق) و طرف نهائي (قمة الوصول)، وقد يكون بين قمتين متتاليتين أو غير متتاليتين (انظر الشكل 1-10).

فكل قوس يحدد بطرفيه الابتدائي و النهائي.

و تكتب مجموعة الأقواس للشكل 1-10 كما يلي:
 $U = \{(A, B); (A, C); (A, D); (B, E); (C, F); (D, G); (E, G); (F, D); (F, G)\}$

5- **المسار (Chemin):** مجموعة متتابعة من الأقواس يكون فيها الطرف النهائي لكل قوس هو الطرف الابتدائي للقوس الموالي باستثناء الطرف النهائي للقوس الأخير (شكل 2-10).

طول المسار هو عدد الأقواس التي يتكون منها، و يكون المسار بسيطاً إذا كان لا يمر سوى مرة واحدة على الأقواس التي يتكون منها، و يكون مساراً أولياً (élémentaire) إذا كان لا يلتقي أكثر من مرة واحدة بكل قمة.

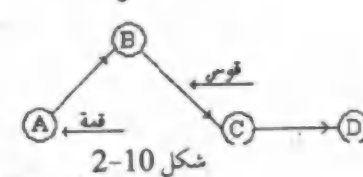
6- **الصلة:** هي مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي باستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير (شكل 3-10).

7- **الدائرة (Circuit):** هي مسار مغلق على نفسه، يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الابتدائي للقوس الأول، كما في شكل 4-10.

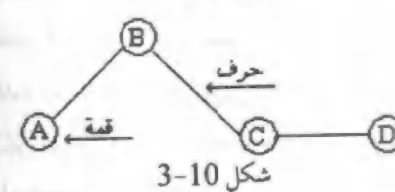
8- **العقدة (Boucle):** هي سهم طرفه الابتدائي هو نفسه طرفه النهائي، أي يعود الى نفس القمة التي ينطلق منها كما في الشكل 5-10.

9- **الشجرة:** هي بيان مترابط بدون حلقة (دائرة)، يحتوي على N قمة، و $N-1$ حرف، كما في الشكل 8-10.

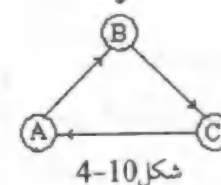
مسار



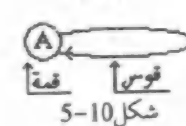
سلسلة



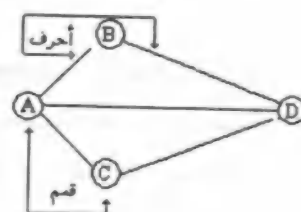
دائرة



عقدة

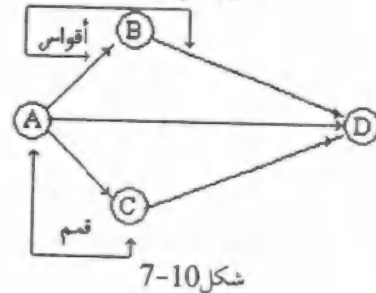


بيان غير موجه



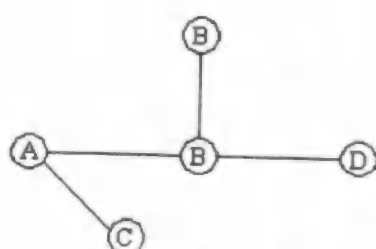
شكل 6-10

بيان موجه



شكل 7-10

شجرة



شكل 8-10

كل قمة في البيان يمكن أن تكون نقطة بداية للقوس أو الحرف أو نقطة نهاية له.

ثانياً: التقديم المصفوفي للبيان: كل بيان يمكن تقديمه عن طريق مصفوفة مربعة من الرتبة n .

و هناك عدة أنواع من المصفوفات التي يمكن أن يقدم عن طريقها:

1- المصفوفة البولينية: M. Booléenne فيها يكون لدينا عدد الأسطر و الأعمدة يساوي عدد القمم، أما عناصر المصفوفة فتساوي 1 إذا كانت توجد علاقة أو 0 إذا لم توجد علاقة أي:

$$M=[a_{ij}]$$

$$\begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

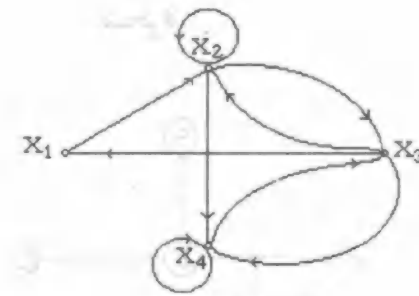
حيث:

$$a_{ij}=1 \quad \text{إذا} \quad (x_i, x_j) \in U$$

$$a_{ij}=0 \quad \text{إذا} \quad (x_i, x_j) \notin U$$

و ذلك كما في المثال التالي:

مثال 10-2: أوجد المصفوفة البولينية للبيان التالي:



شكل 10-9

يتم تقديم المصفوفة البولينية للشكل 10-9 كما يلي:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1
x_4	0	0	1	1

يلاحظ أن القيمة 1 وضعت في الاتجاه الذي يذهب إليه القوس، أي من x_i إلى x_j ، و القيم 1 الموجودة في قطر المصفوفة تبذل على وجود عقدة، أي قوس يتجه الى نفس القمة. لتسهيل كتابة المصفوفة فإنه يمكن الاستعانة بالجدول، وذلك كما في المثالين التاليين:

مثال 10-3: أكتب البيان 10-6 في شكل مصفوفة بولينية.

البيان 10-6 غير موجه و بالتالي يمكن كتابته كما يلي:

القمم	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	1
D	1	1	1	0

جدول 10-1

العدد 0 يدل أنه لا توجد علاقة بين القمتين، أما العدد 1 فيدل على وجود هذه العلاقة، و بما أن البيان غير موجه فيعني ذلك وجود علاقة في الاتجاهين، لذلك فيلاحظ أن مصفوفة البيان متناظرة، بالنسبة للقطر الصفري.

مثال 10-4: أكتب المصفوفة البولينية للبيان 10-7.

بما أن البيان موجه فإن العلاقة بين القمم تكون فقط في اتجاه السهم، لذلك فإن مصفوفة البيان غير متناظرة. و تكون المصفوفة البولينية كما يلي:

القيم	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	0	0	0

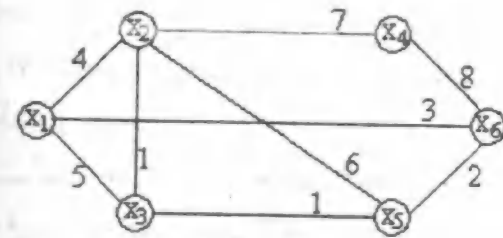
جدول 2-10

و يلاحظ أن السطر الأخير كله معدوم ليدل على أنه لا ينطلق من القمة D أي قوس، و بما أن عناصر القطر كلها صفيرية فإن ذلك يدل على أنه لا توجد عقدة في البيان.

و سوف نصطلح على تسمية البيان ابتداء من الآن بالشبكة.

2- مصفوفة السعة: تكون الشبكة مقيمة إذا كان كل قوس أو حرف فيها يمثل كمية تعبر إما عن الطول أو الحجم أو التكلفة... الخ، و في هذه الحالة يمكن أن نعبر عن الشبكة بمصفوفة تسمى مصفوفة السعة، حيث يمثل كل عنصر فيها حمولة القوس أو الحرف بين كل قمة وقمة أخرى، و إذا لم توجد علاقة بين قمتين فإنه يتم التعبير عن ذلك بالقيمة صفر.

مثال 5-10: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الخطوط للشبكة الكهربائية بين مجموعة من القرى.



شكل 10-10

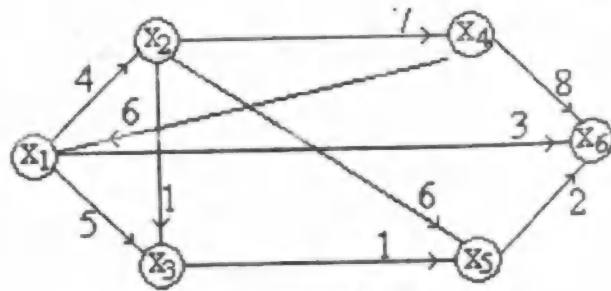
المطلوب: عبر عن الشبكة في شكل مصفوفة للسعة. هذه الشبكة هي عبارة عن بيان غير موجه، و بالتالي فكل حرف يؤخذ في الاتجاهين، ذهابا و إيابا، لذلك فإن مصفوفة السعة تكون على النحو التالي:

القيم	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
X ₁	0	4	5	0	0	3
X ₂	4	0	1	7	6	0
X ₃	5	1	0	0	1	0
X ₄	0	7	0	0	0	8
X ₅	0	6	1	0	0	2
X ₆	3	0	0	8	2	0

جدول 3-10

و هي مصفوفة متناظرة بالنسبة لقطرها الصفيري.

مثال 6-10: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الطرق بين مجموعة من القرى بالكيلومتر.



شكل 10-11

المطلوب: أكتب مصفوفة السعة لهذه الشبكة. هذه الشبكة هي بيان موجه، و بالتالي فإن سعة الأقواس تكون في اتجاه واحد فقط، و عليه فإن مصفوفة السعة تكون على النحو التالي:

بتطبيق المبدأ أعلاه نحصل على مصفوفة المساقط التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	1	-1	0	0
(x_1, x_4)	1	0	0	-1
(x_2, x_3)	0	1	-1	0
(x_2, x_4)	0	1	0	-1
(x_4, x_1)	-1	0	0	1
(x_4, x_2)	0	-1	0	1
(x_4, x_3)	0	0	-1	1

حيث: 1 هي القمة الابتدائية و -1 هي القمة النهائية.
و يلاحظ أن كل القمم تشكل أطرافاً ابتدائية ونهائية إلا القمة x_3 فهي تشكل أطرافاً نهائية، لذلك لا يظهر في عمود x_3 سوى القيم -1.
كما أن عدد صفوف المصفوفة هو بعدد أقواس البيان.

4- مصفوفة الأقواس: عبارة عن المصفوفة البوليانية معبر عنها برموز القمم، أحذا بعين الاعتبار الإتجاه من القمة i إلى القمة j وذلك كما في المثال التالي:
مثال 10-8: عبر عن البيان 9-10 بشكل مصفوفة الأقواس.
البيان المشار إليه هو:

القمم	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	4	5	0	0	3
x_2	0	0	1	7	6	0
x_3	0	0	0	0	1	0
x_4	6	0	0	0	0	8
x_5	0	0	0	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0	0

جدول 10-4

و تدل كل قيمة في مصفوفة السعة على سعة القوس أي حمولته ، إذا كانت قيمته أكبر من الصفر، أما إذا كانت مساوية للصفر فتدل على أنه لا توجد علاقة بين القمتين.

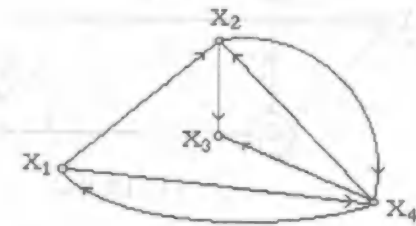
3- مصفوفة المساقط للبيان الموجه بدون حادّة: فيها يكون:

$a_{ij}=1$ إذا كان القوس ينطلق من القمة،

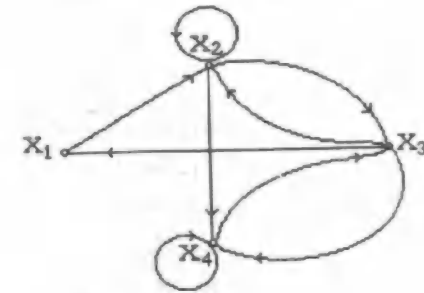
$a_{ij}=-1$ إذا كان القوس يصل إلى القمة.

$a_{ij}=0$ إذا كانت لا توجد علاقة

فالقيمة 1 تمثل الطرف الابتدائي للقوس والقيمة -1 تمثل الطرف النهائي للقوس، أما بقية قيم المصفوفة فتكون معدومة.
مثال 10-7: أوجد مصفوفة المساقط للبيان التالي:



شكل 10-12



شكل 10-13

مصفوفة الأقواس لهذا البيان يعبر عنها كما يلي:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ & x_2 x_2 & x_2 x_3 & x_2 x_4 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & & x_3 x_4 \\ & & x_4 x_3 & x_4 x_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

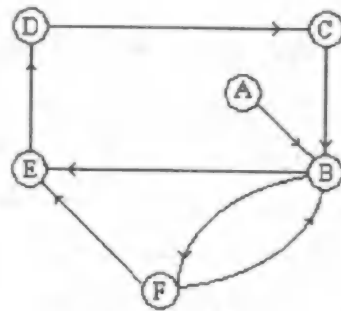
لاحظ أنه بدل أن توضع القيمة 1 عند وجود علاقة كما في المصفوفة البولينية فإنه يعبر عن ذلك برموز القمم.

ثالثاً: تقديم البيان عن طريق جداول: يمكن أن يقدم البيان عن طريق إما جدول السوابق أو جدول اللواحق.

1- جدول اللواحق، فيه يتم وضع جدول بعمودين، يوضع في العمود الأول القمم و في العمود الثاني لواحقها أي الأطراف النهائية.

2- جدول السوابق، فيه يتم أيضاً وضع جدول بعمودين، يوضع في الأول الأطراف الابتدائية و في الثاني توضع الأقواس التي تصل الى الطرف.

مثال 10-9: قدم البيان التالي مرة بجدول اللواحق و أخرى بجدول السوابق.



شكل 10-14

حسب التعريف أعلاه فإن الجدولين يقدمان كما يلي:
جدول اللواحق

الواحق S(x)	القمم (X)
B	A
E, F	B
B	C
C	D
D	E
B, E	F

جدول 10-5

S(x) هي مجموعة لواحق X.

جدول السوابق

السوابق P(x)	القمم (X)
-	A
A, C, F	B
D	C
E	D
B, F	E
B	F

جدول 10-6

P(X) هي مجموعة سوابق X.

رابعاً: إستخدامات نظرية البيانات: تستخدم نظرية البيانات في الكثير من المسائل الواقعية من مسائل بحوث العمليات، و من المسائل التي سوف نستخدم فيها نظرية البيانات و التي تطرقنا لها من خلال الفصول الموالية ما يلي:

- نظرية الشجرة المثلى في حالي التعظيم و التدنئة.
- نظرية المسارات المثلى في حالي التعظيم و التدنئة.
- نظرية التدفق الأعظمي. تحليل شبكات الأعمال وبالأخص طريقة CPM و أسلوب تقييم البرامج ومراجعة التقنيات المعروف بأسلوب PERT.

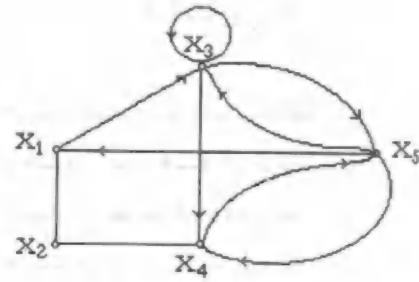
تمارين

تمرين 1: اعط تعاريف مدعمة برسومات للمصطلحات التالية:

1- القمة 2- الحرف 3- القوس 4- الدارة

5- السلسلة 6- المسار 7- الحلقة.

تمرين 2: اليك البيان التالي:

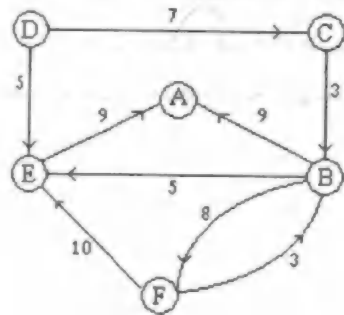


المطلوب:

أ- أوجد المصفوفة البولونية.

ب- أوجد مصفوفة الأقواس.

تمرين 3: من البيان التالي:



أ- أوجد مصفوفة المساقط.

ب- أوجد المصفوفة البولونية.

ج- أوجد مصفوفة الأقواس.

د- أوجد مصفوفة السعة.

تمرين 4: ارسم بيانا مصفوفته البولينية كما يلي:

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	0	1	0

تمرين 5: من بيانات سلسلة تمارين الشجرة المثلى في الفصل الموالي:

- أ- أوجد مصفوفة المساقط.
- ب- أوجد المصفوفة البولونية.
- ج- أوجد مصفوفة الأقواس.
- د- أوجد مصفوفة السعة.

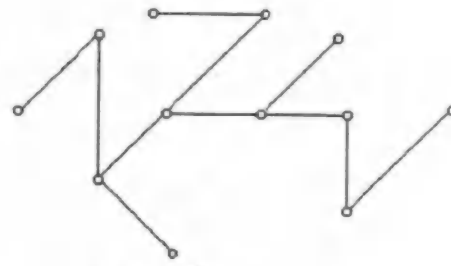
تمرين 6: من بيانات سلسلة تمارين المسارات المثلى في الفصل الرابع:

- أ- أوجد مصفوفة المساقط.
- ب- أوجد المصفوفة البولونية.
- ج- أوجد مصفوفة الأقواس.
- د- أوجد مصفوفة السعة.

الفصل الحادي عشر نظرية الشجرة المثلى.

أولاً: مفهوم الشجرة: كل بيان غير موجه و مترابط ولا يحتوي على أية حلقة (دائرة) يشكل ما يصطلح عليه شجرة، أي أن الشجرة عبارة عن مجموعة من الأحرف مترابطة بينها غير مجموعة من القمم، دون أن تشكل دائرة أو حلقة مع بعضها البعض، كما يظهر في الشكل 1-11.

بيان في شكل شجرة



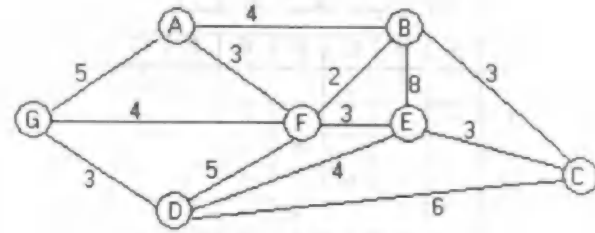
شكل 1-11

فإذا كان لدينا البيان: $G=(X,U)$ به n قمة فإنه يمكننا تشكيل شجرة بعدد $n-1$ من الأحرف.

ويمكن أن نشكل من بيان واحد عدد من الشجيرات.

ثانياً: الشجرة المثلى: من كل بيان غير موجه يمكن الحصول على عدد من الشجيرات، و الشجرة المثلى في البيان المقيم هي التي تعطي أقل حمولة ممكنة أي أقل تكلفة أو مسافة... الخ، أو أعظم حمولة أي أعلى الأرباح أو العوائد، أو التدفقات.

ثالثاً: إستخدامات نظرية الشجرة المثلى: تستخدم نظرية الشجرة المثلى في إيجاد أقصر مسافة أو أقل تكلفة... الخ أو أعلى الأرباح أو العوائد.... الخ، عند ربط عدد من الأماكن



شكل 2-11

حيث القمم A,B,C,D,E,F,G تمثل القرى، و الأحرف تمثل الخطوط الممكنة.

و يلاحظ أنه لا توجد أحرف بين بعض القمم (القرى)، و هذا لإمكانية وجود موانع طبيعية كالجبال أو الغابات، أو موانع أخرى، و تظهر بجانب كل حرف تكلفة إنجاز الخط الكهربائي بين كل قرية و أخرى بآلاف الدينارات.

و يكون **المطلوب**: ما هي الشبكة الممكنة اقترحها و التي تسمح بتزويد جميع القرى (A , B , C , D , E , F , G) بالكهرباء و بأقل تكلفة ممكنة؟.

واضح أنه ينبغي علينا إنجاز الخطوط الكهربائية بأقل تكلفة، وهذا بالشكل الذي يجعل الكهرباء تصل الى كل قرية من القرى التي تظهر في الشبكة، و غير خط وحيد.

و واضح من البيان أيضا أن الخطوط الواصلة بين كل قمة و قمة أخرى هي عبارة عن أحرف، الشيء الذي يجعل مصفوفته متناظرة بالنسبة للقطر، و يظهر ذلك من المصفوفة التالية التي تعبر عن البيان الوارد في الشكل 2-11.

بشبكة كهربائية أو هاتفية أو قنوات... الخ، أي أنها تستعمل في الإمدادات الطويلة، بهدف التحليل و إنجاز المشاريع بأخفض التكاليف أو جني أعلى الأرباح، فمهندسو الشركات الإنشائية للطرق و كوابل الهاتف و الكهرباء و المياه، تكون و سيلاهم من خلال المخططات الطويلة المنجزة في شكل شبكات لتوضيح المسافات أو التكاليف أو الأرباح المتوقعة لكل خط بين نقطتين، و من ثم يمكن الاستفادة من خلال خوارزمية الشجرة المثلى من معرفة المسالك الممكنة التي تؤدي لإنجاز المشروع بأقل مسافة أو أقل تكلفة أو أعلى الأرباح أو العوائد.

و واضح إذن أننا نتكلم عن حالتين من الشجرة المثلى، الحالة الأولى هي الشجرة الدنيا، و الحالة الثانية هي الشجرة العظمى.

رابعا: حالة الشجرة الدنيا: الشجرة المثلى هي بيان غير موجه لا يتوي على أية دائرة يتم الحصول عليه من بيان يحتوي على إمكانيات ربط متعددة، بحيث أن مجموع حمولة هذه الأحرف يكون أصغر ما يمكن، و تعطى إشكالية الشجرة الدنيا بشكل مشابه للمثال التالي:

مثال 1-11: تريد المؤسسة الوطنية للكهرباء و الغاز إمداد شبكة كهربائية لتغطية عدد من القرى الريفية بالكهرباء.

الدراسة الأولية بينت إمكانيات الربط بين هذه القرى و كذا تكاليف الربط بآلاف الدينارات، حسب ما هو موضح في البيان التالي:

مصفوفة السعة للبيان 2-11

القيم	A	B	C	D	E	F	G
A	-	4	-	-	-	3	5
B	4	-	3	-	8	2	-
C	-	3	-	6	3	-	-
D	-	-	6	-	4	5	3
E	-	8	3	4	-	3	-
F	3	2	-	5	3	-	4
G	5	-	-	3	-	4	-

جدول 1-11

و حل مثل هذه المسائل، يتطلب الأمر البحث عن ما يسمى الشجرة الدنيا ضمن بيان مقيم، ويتم ذلك باستعمال إحدى الخوارزميتين التاليتين:

1- **خوارزمية كروسكال**: (J. B. KRUSKAL) ظهرت سنة 1956 ، وهي خوارزمية جد بسيطة، ملخصها كما يلي:
أ- نرتب الأحرف تصاعديا حسب حمولتها.

ب- نأخذ الأحرف الأقل قيمة تصاعديا ونرسمها، مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دائرة) مع الأحرف التي سبق رسمها.

ج- نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها هو $N-1$.

و لحساب الحمولة الدنيا التي تعكس أقل تكلفة أو أقل مسافة...، نجمع حمولة الأحرف التي شكلت لنا شجرة.

ملاحظة: في حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نمايز بينها بإضافة إلى بعضها قيمة صغيرة ϵ ، 2ϵ ...

2- **خوارزمية سولان**: (G. SOLLIN)، ظهرت سنة 1961 لإيجاد أدنى شجرة بهذه الخوارزمية تتبع الخطوات التالية:

أ- نمايز بين الأحرف التي لها نفس الحمولة (القيم)، بإضافة ϵ ، 2ϵ ...

ب- نأخذ أية قمة ونفحص الأحرف التي تتصل بها و نأخذ أقلها و نرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقه.

ج- نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق وأن أخذت.

د- عند فحص جميع القمم و تكون النتيجة المحصلة هي شجرة تتصل بها جميع القمم، نكون حينئذ أمام الحل الأمثل،

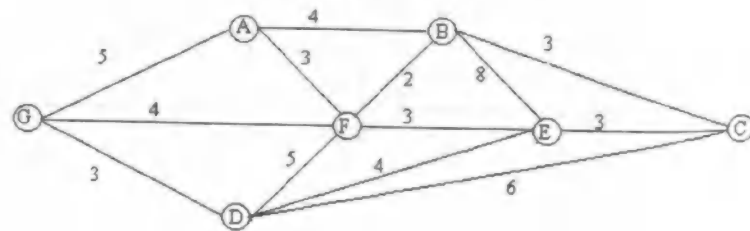
هـ- أما إذا فحصت جميع القمم لكننا حصلنا على عدد من الشجيرات (أي الفروع) فإن الحل الأمثل لم نصل إليه بعد، و عليه نبحث عن أقل الأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل في النهاية على شجرة بقيمة دنيا.

نجمع في النهاية حمولة الأحرف التي تشكل الشجرة فنحصل على التكلفة أو المسافة الدنيا.

مثال 2-11: بالعودة إلى المثال 1-11 ، ما هي الشبكة الممكنة اقترحها و التي تسمح بتزويد كل القرى بالكهرباء و بأقل تكلفة ممكنة.

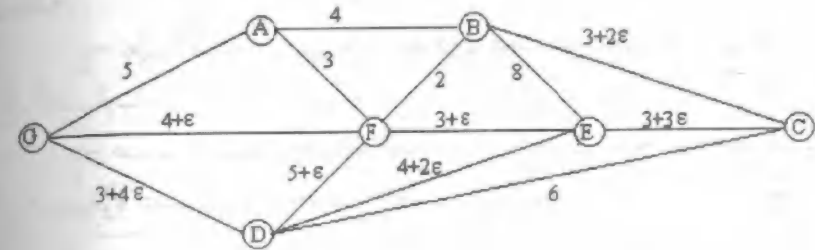
الشبكة المشار إليها في المثال هي:

شكل 3-11



والأمر هنا يتطلب إيجاد شجرة دنيا.

لأجل ذلك نطبق إما خوارزمية كريسكال أو خوارزمية سولان.
و قبل ذلك نغايز بين الأحرف المتساوية الحمولة كما يظهر في البيان التالي:



شكل 4-11

لاحظ أنه يمكن التمييز بين الأحرف بشكل مختلف، دون أن يؤدي ذلك الى حل أمثل مختلف في القيمة الدنيا للتكلفة أو المسافة.

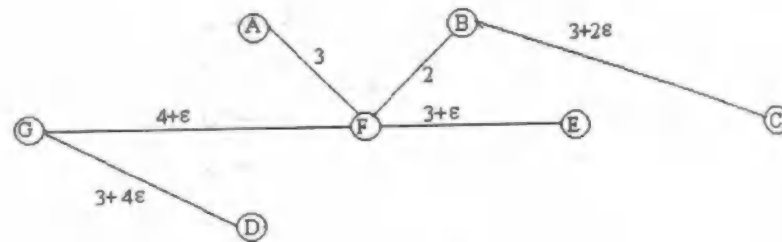
أ- **العل باستخدا خوارزمية كريسكال:** بعد أن نغايز بين الأحرف المتساوية الحمولة، نرتب الأحرف تصاعديا حسب حمولتها دون تكرار، كما يظهر في جدول الترتيب التالي:

جدول الترتيب

الترتيب	الحرف	الحمولة
1	BF=	2
2	AF=	3
3	EF=	3+ε
4	BC=	3+2ε
5	CE=	3+3ε
6	DG=	3+4ε
7	AB=	4
8	FG=	4+ε
9	ED=	4+2ε
10	AG=	5
11	Df=	5+ε
12	DC=	6
13	BE=	8

جدول 2-11

نبدأ بأقل حمولة وهي $BF=2$ ونرسمها، ثم نتقل الى الحرف الموالي من حيث القيمة $AF=3$ ونرسمه ونستمر مع إهمال كل حرف يمكن أن يشكل لنا حلقة مع غيره من الأحرف التي سبق رسمها، وعلى سبيل المثال نلغي الحرف $CE=3+3ε$ لأنه يشكل لنا حلقة مع ما سبقه من الأحرف، كما نلغي الأحرف AB, ED, AG, Df, BE, DC ، لنفس السبب، وتكون الشجرة ذات القيمة الدنيا على نحو الشكل التالي:



شكل 5-11

بعد أن أنهينا الرسم نكون بذلك قد حصلنا على شجرة عدد أحرفها يساوي عدد القيم منقوصا منه واحد، أي $N-1$ ، وبتكلفة دنيا قيمتها تساوي مجموع حمولات الأحرف، أي:

$$Z=3+2+3+2ε+3+ε+4+3+4ε=18+8ε$$

$$Z=18$$

بإهمال $ε$ نجد:

أي أن تكلفة الإنجاز الدنيا هي 18 ألف دينار.

و يلاحظ أن كل القيم متصلة بالأحرف، أي أن جميع القرى تكون متصلة بخطوط الكهرباء، فأين ما وضع جهاز التموين بالكهرباء فإن الكهرباء تصل الى كل القرى.

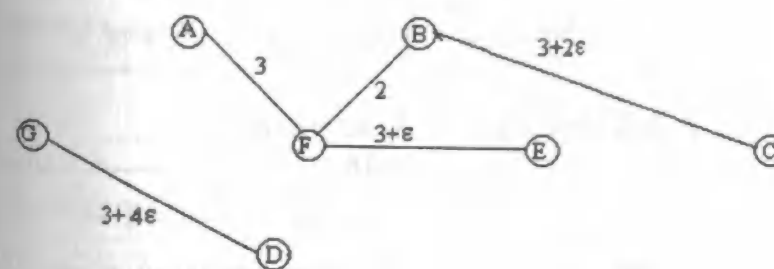
بج- العمل باستخدام خوارزمية هولان: بعد أن نغايير بين الأحرف نفحص قمة بعد قمة و في كل حالة نختار أقل حرف دون إعادة أخذ الحرف الذي تم اختياره من قبل، كما هو واضح في الجدول التالي:

جدول الاختيار

الحرف المختار	القمة
AF=3	في القمة A
BF=2	في القمة B
BC=3+2ε	في القمة C
DG=3+4ε	في القمة D
EF=3+ε	في القمة E
تم الاختيار	في القمة F
تم الاختيار	في القمة G

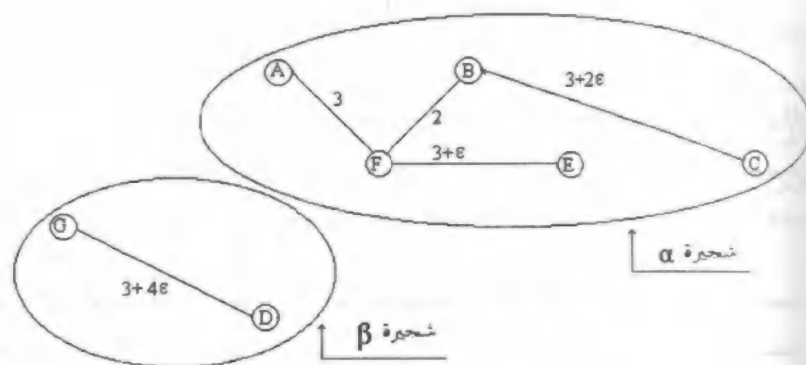
جدول 3-11

نرسم الأحرف المختارة كما هي في الشكل التالي:



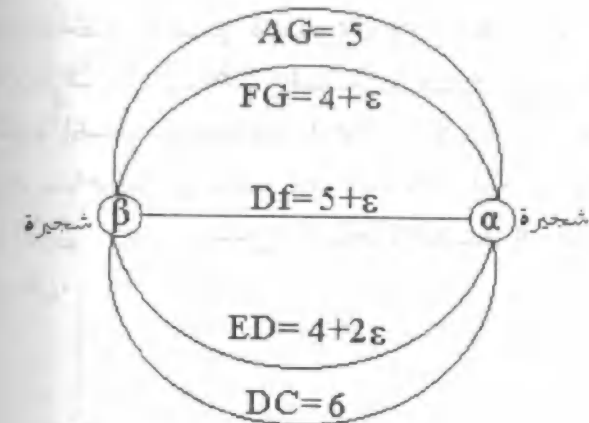
شكل 6-11

لاحظ أننا حصلنا على شجرتان الأولى تتكون من 5 قمم وأربعة أحرف و الثانية من قمتين و حرف واحد، وبما أن الهدف هو إيجاد شجرة دنيا، لذلك لابد من الربط بين الشجرتان بالحرف ذي الأقل حمولة، لأجل ذلك نسمي الشجرة الأولى α و نسمي الشجرة الثانية β، كما يظهر في الشكل التالي:



شكل 7-11

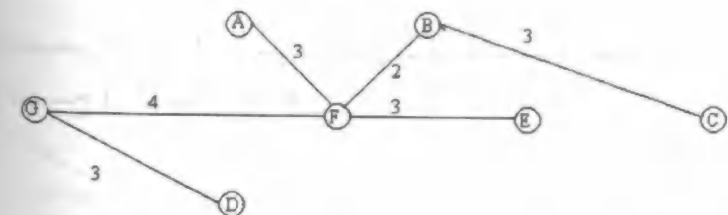
ثم نقوم بفحص الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجرتان كما هو واضح في الشكل 8-11.



شكل 8-11

و من بين تلك الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجرتان نأخذ أقلها حمولة، و كما هو واضح في الرسم فإن أقل الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجرة α و الشجرة β هو $FG=4+\epsilon$ بعد رسمه تتصل الشجرتان ببعضهما و تشكل لنا شجرة دنيا، و هي نفس الشجرة التي حصلنا عليها باستعمال طريقة كريسكال و هي:

شكل 9-11



و لاحظ أنه بعد رسم الشجرة تم إلغاء ϵ و مضاعفاتها التي تمت الاستعانة بها. و بجمع حمولات أحرف الشجرة المثلى المحصل عليها نجد أيضا أن أدنى تكلفة إنجاز هي: $Z=18$ ألف دينار.

خامسا: حالة الشجرة العظمى: قد تكون الإشكالية المطروحة أحيانا هي إيجاد أطول شجرة للربط بين مجموعة من القمم، و عمليا يمكن أن نصادف بعض المسائل التي تعطى فيها الأرباح أو العوائد التي يمكن أن نحقق عند الربط بين مجموعة من المناطق، و يكون الهدف هو إيجاد الشجرة التي تعطى أعلى الأرباح أو أعلى العوائد.

و لحل مثل هذه المسائل فإنه يمكن الاستعانة بنفس المبدأ الذي تقدمه خوارزمية كريسكال و خوارزمية سولان، إنما في الاتجاه المعاكس، و ذلك كما يلي:

1- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ خريسكال: إعتمادا على مبدأ كريسكال المستخدم في إيجاد الشجرة الدنيا، فإنه يمكن إعطاء الخوارزمية التالية في إيجاد أعظم شجرة:

- أ- نرتب الأحرف تنازليا حسب حمولتها.
- ب- نأخذ الأحرف الأكبر قيمة تنازليا و نرسمها، مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دائرة) مع الأحرف التي سبق رسمها.
- ج- نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها هو $N-1$.

و لحساب الحمولة العظمى التي تعكس أعظم ربح أو أعظم عائد، نجمع حمولة الأحرف التي شكلت لنا شجرة.

ملاحظة: في حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نميز بينها بإضافة إلى بعضها قيمة صغيرة ϵ ، 2ϵ ...

2- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ سولان: إعتمادا على مبدأ سولان فإنه يمكن اتباع الخطوات التالية لإيجاد أعظم شجرة:

- أ- نميز بين الأحرف التي لها نفس الحمولة (القيم)، بإضافة ϵ ، 2ϵ ...

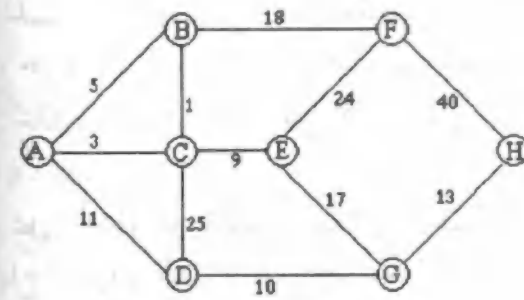
ب- نأخذ أية قمة و نفحص الأحرف التي تتصل بها ونأخذ أكبرها و نرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقه.
ج- نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق و أن فحصت.

د- عند فحص جميع القمم و تكون النتيجة المحصلة هي شجرة تتصل بها جميع القمم، نكون حينئذ أمام الحل الأمثل،

هـ- أما إذا فحصت جميع القمم لكننا حصلنا على عدد من الشجيرات (أي الفروع) فإن الحل الأمثل لم نصل إليه بعد، و عليه نبحث عن أكبر الأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل في النهاية على شجرة بقيمة عظمى.

نجمع في النهاية حمولة الأحرف التي تشكل الشجرة فنحصل على الربح أو العائد الأعظم.

مثال 11-3: تريد مديرية الأشغال العمومية الربط بين مجموعة من الأحياء السكنية بكابل خاص بالأنترنات، الدراسة الأولية بينت إمكانية الربط بين مختلف الأحياء و الأرباح التي يمكن أن تجنيها المؤسسة التي أوكلت إليها مهمة الإنجاز بين كل حي و آخر، و ذلك كما في الشكل التالي:



شكل 10-11

الأرباح بملايين الدينارات.
المطلوب إيجاد الخطة التي يمكن بفضلها أن توصل الشركة الأنترنات لكل حي والتي تسمح لها بجني أعلى الأرباح.

أ- باستخدام مبدأ خريصكال:

نرتب الأحرف تنازليا حسب حمولتها دون تكرار، كما يلي:

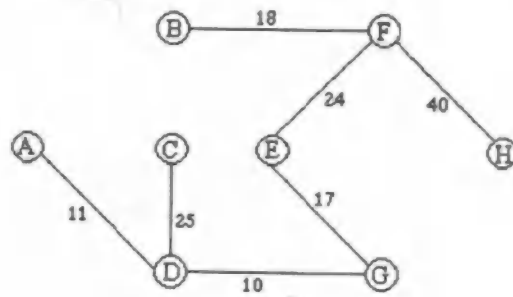
جدول الترتيب

الحمولة	الحرف	الترتيب
11	AD=	7
10	DG=	8
9	CE=	9
5	AB=	10
3	AC=	11
1	BC=	12

الحمولة	الحرف	الترتيب
40	FH=	1
25	CD=	2
24	EF=	3
18	BF=	4
17	EG=	5
13	GH=	6

جدول 4-11

نبدأ برسم الأحرف الأكبر فالتالي تلي مع تجنب تشكيل حلقة، فنحصل على الشكل التالي:



شكل 11-11

لاحظ أننا تجاوزنا رسم الحرف GH=17 لأنه يشكل لنا حلقة، و توقفنا عند رسم DG=10 لأن كل القمم تكون عندئذ متصلة، و رسم أي حرف بعد ذلك يجعلنا نشكل حلقة.

و نكون بذلك قد حصلنا على شجرة ، و تكون الأرباسح
الاعظمية المحصل عليها عند تنفيذ المشروع هي مجموع الأرباسح
المحصلة عند كل ربط بين حينين، أي:

$$Z=18+40+24+17+10+25+11=145$$

فأعظم ربح يمكن الحصول عليه هو إذن 145 مليون دينار.

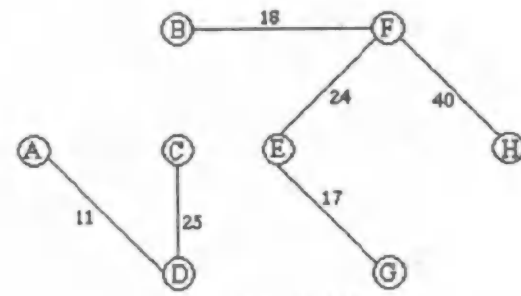
ج- باستخدام مبدأ هولان: نفحص قمة بعد قمة و في كل
حالة نختار أكبر حرف دون إعادة أخذ الحرف الذي تم اختياره
من قبل، كما هو واضح في الجدول التالي:

جدول الاختيار

الحرف المختار	القيمة
AD=11	في القمة A
BF=18	في القمة B
CD=25	في القمة C
تم الاختيار	في القمة D
EF=24	في القمة E
FH=40	في القمة F
تم الاختيار	في القمة G
تم الاختيار	في القمة H

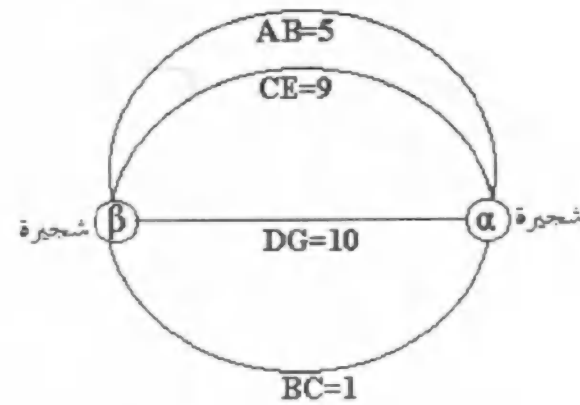
جدول 5-11

بعد رسم الأحرف المختارة نحصل على الشكل التالي:



شكل 11-12

لاحظ أننا حصلنا على شجرتان الأولى تضم الأحرف
B, E, F, G, H، و الثانية تضم الأحرف A, C, D، و بما أن القرى
يجب أن تكون جميعها متصلة، لذلك نبحث عن الربط بينهما
كما فعلنا في حالة الشجرة الدنيا، و عليه نسمي الشجرة
الأولى α و الشجرة الثانية β ، و نختار أكبر حرف يمكن أن
يربط بينهما، كما هو واضح في الشكل أدناه:



شكل 11-13

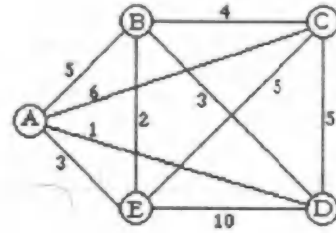
و واضح أن أكبر حرف يربط بين الشجرة α و الشجرة β
هو الحرف DG=10 و منه فإن الشجرة العظمى هي:

تمارين

تمرين 1: إعط تعريفاً للشجرة المثلى، و حدد إستخداماتها في الحياة العملية.

تمرين 2: قدم مسألة تصورية من خيالك، تستخدم فيها نظرية الشجرة المثلى في الحل مرة في حالة التعظيم و أخرى في حالة التدنئة، ثم أوجد حلها في الحالتين و بإستخدام الخوارزميتين.

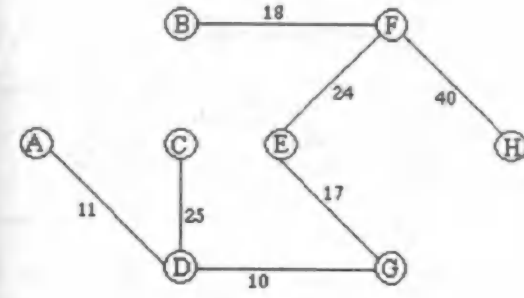
تمرين 3: تريد مديرية الطرقات إحداث شبكة من الطرقات بين 5 قري متباعدة بحيث تتصل كل القرى ببعضها البعض. الدراسات بينت المسافة التي تربط بين كل قرية و قرية أخرى بالكيلومترات حسب البيان التالي:



تبحث هذه المؤسسة عن أمثل شبكة يمكن إنجازها و التي من شأنها أن تدني تكلفة إنجاز هذه الطرقات، علماً أن تكلفة إنجاز كل كيلومتر تقدر بـ 10.3 دج.

المطلوب: حدد هذه الشبكة بإستخدام الخوارزميتين.

تمرين 4: ما هي أمثل شبكة من الطرقات تقترحها على المؤسسة الوطنية للمنشآت الفنية الكبرى، المكلفة بإنجاز عدد من الطرقات تربط مجموعة من المدن ببعضها البعض، إذا علمت أن تكاليف إنجاز الطريق بين كل مدينة و مدينة أخرى موضحة في الجدول التالي:



شكل 11-14

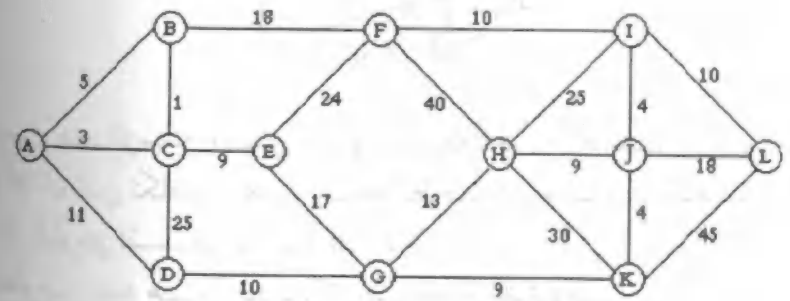
و هي بنفس النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة كريسكال، أي أن الأرباح العظمى المحصلة هي: $Z=145$ مليون دينار.

الوحدة: 10⁹ دج.

المدن	A	B	C	D	E
A	-	7	10	4	6
B	7	-	3	2	1
C	10	3	-	5	3
D	4	2	5	-	1
E	6	1	3	1	-

تمرين 5: إذا كانت بيانات جدول التمرين 4 تعبر عن الأرباح، فما هو الربح الأعظمي باستخدام الطريقتين.

تمرين 6: في إطار برنامج الكهرباء الريفية التي تقوم بها إحدى الولايات، طلب من شركة كهريف إنشاء محطة لتوليد الكهرباء في إحدى القرى الإثنتا عشر المعنية بعملية الكهرباء. بعد دراسة العراقل الجغرافية توصلت المؤسسة الى إمكانيات الربط المختلفة والمسافات بين كل قرية و أخرى كما هي في البيان التالي:



إذا علمت ان تكلفة الخط الكيلومتری الواحد هي 10 آلاف دينار و ان كلفة إنجاز محطة التوليد الكهربائي هي: 10⁹ دج. ما هي أقل تكلفة استثمارية تتحملها كهريف.

تمرين 7: يظهر الجدول التالي تكاليف إنجاز شبكة خطوط هاتفية بين مجموعة من الأحياء الكبرى بالعاصمة:

	حي النور	حي النجاج	حي الفلاح	حي الأستاذ	حي الفلاح	حي السلام	حي الونام
حي النور	-	8	8	3	11	10	9
حي النجاج	8	-	4	7	12	-	4
حي الفلاح	8	4	-	-	9	7	6
حي الأستاذ	3	7	-	-	13	9	-
حي الفلاح	11	12	9	13	-	9	8
حي السلام	10	-	7	9	9	-	5
حي الونام	9	4	6	-	8	5	-

المطلوب:
أ- إرسم البيان الموافق للجدول .
ب- أوجد أمثل شبكة يمكن أن تربط بين جميع الأحياء بطريقتي كريسكال و سولان.
تمرين 8: باعتبار أن الأرقام الواردة في جدول المثال 7 عبارة عن الأرباح التي تحصل عليها الشركة المنجزة، فما هي الشبكة التي تقترحها و التي تجعل الأرباح في أعظم قيمة لها. أوجد الحل بطريقتي كريسكال و سولان.

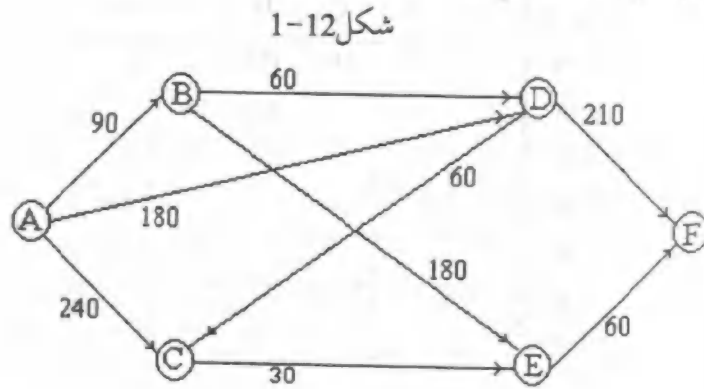
الفصل الثاني عشر نظرية المسارات المثلى.

كثيرا ما تصادف الاقتصادى مسائل عملية جوهرها هو البحث عن أمثل مسار يربط بين نقطتين محددتين من بين مجموعة كبيرة من المسارات ضمن بيان موجه، و ذلك دون اشتراط المرور بجميع القمم.

فإذا كان لدينا البيان الموجه $G(X,U)$ حيث أن كل قوس u يحمل قيمة هي $c(u) \geq 0$ ، فإن هدف النظرية هو البحث عن أقصر أو أطول مسار ينطلق من القمة الابتدائية للبيان x_0 ليصل الى القمة النهائية للبيان x_n .

أولا : طرح المسألة: تطرح مسائل المسارات المثلى بشكل مشابه للمثال التالي:

مثال 1-12: تريد اللجنة العلمية لمعهد العلوم الاقتصادية و علوم التسيير تنظيم رحلة علمية الى جامعة قسنطينة عن طريق البر. أعضاء لجنة ترتيبات الرحلة اقترحوا عددا من المسالك التي يمكن اتخاذها انطلاقا من مدينة الشلف A الى مدينة قسنطينة F. المسالك الرئيسية و المدن الممكن المرور بها و المسافات بين المدن يوضحها البيان التالي:



من بين المسالك الممكنة المقترحة يريد رئيس اللجنة تحديد أقصر طريق يمكن المرور به مع تحديد قيمة المسافة الدنيا التي ينبغي قطعها و المدن التي يتم المرور عبرها للوصول الى قسنطينة.

على هذا النحو تطرح مسائل المسارات المثلى.

و هي مسائل شائعة و كثيرة المصادفة خاصة في النقل البري و البحري والجوي و الإمداد عن طريق القنوات أو الخطوط كالكهرباء و الغاز والهاتف... الخ.

و يلاحظ أن الأمر هنا يختلف عن نظرية الشجرة المثلى، ففي الشجرة المثلى يشترط دخول جميع القمم في الحل الأمثل، كما أن الوصل بين كل قمة و أخرى عبارة عن حرف، أي يمكن أن يأخذ في الاتجاهين، بينما في نظرية المسارات المثلى، فلا يشترط المرور بجميع القمم، بل يشترط إيجاد أقصر مسار يربط بين القمة الابتدائية للبيان و قمة النهائية، و أن الربط بين القمم يتم عن طريق أسهم (أقواس) و ليس عن طريق الأحرف، أي أنها تأخذ في اتجاه واحد فقط و ليس في اتجاهين، و يترتب على هذا أن مصفوفة السعة للبيان لا تكون متناظرة كما هو الحال في الشجرة المثلى، و تُظهر ذلك مصفوفة البيان الوارد في المثال السابق و هي:

مصفوفة السعة للبيان 1-12

القمم	A	B	C	D	E	F
A	-	90	240	180	-	-
B	-	-	-	60	180	-
C	-	-	-	-	30	-
D	-	-	60	-	-	210
E	-	-	-	-	-	60
F	-	-	-	-	-	-

جدول 1-12

و كما سبقت الإشارة فإن نظرية المسارات المثلى لا تستخدم فقط في إيجاد أقصر مسار بين نقطتين، لكنها يمكن أن تستخدم أيضا و لو في حالات نادرة في البحث عن أطول مسار بين قمتين.

ثانيا: حل مسائل المصاراة المثلى: لحل مسائل المسارات المثلى يتم استخدام خوارزمية تسمى بخوارزمية فورد، كما سوف نتطرق الى طريقة أخرى تعتمد على فحص جميع المسارات و و سنطلق عليها اسم طريقة الفحص التتابعي.

1- طريقة فورد: و فيها تستخدم خوارزمية تسمى بخوارزمية فورد نسبة الى أول من استعملها، و سيتم استخدامها سواء في حالة البحث عن أقصر مسار أو عن أطول مسار.

أ- البحث عن أقصر مسار: لأجل ذلك تتبع الخطوات التالية:

1- نعيد تسمية قمم البيان على النحو التالي:

قمة الإنطلاق نسميها x_0 .

القمة الموالية x_1 ، و هكذا حتى قمة الوصول أي قمة النهاية تكون x_{n-1} ، حيث أن العدد الكلي للقمم هو n .

2- بجانب القمة x_0 نضع $\lambda_0=0$ ، بجانب بقية القمم x_i حيث $i \neq 0$ نضع القيمة $\lambda_i = \infty$

3- نفترض أن $c(x_i, x_j)$ هي حمولة (قيمة) القوس (x_i, x_j)

مرحلة الذماب:

4- في كل قمة x_j تكون فيها:

$$c(x_i, x_j) > (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$\lambda_i + c(x_i, x_j)$$

نعوض λ_j بالقيمة:

5- نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_i .

مرحلة الإجابة:

6- نبدأ من قمة الوصول x_{n-1} و نطرح من القيمة λ_{n-1} قيمة λ_p الموجودة في الأطراف الابتدائية للأقواس التي تصل الى x_{n-1} و نأخذ القوس الذي تكون فيه:
 $(\lambda_{n-1} - \lambda_p) = c(x_i, x_j)$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس التي يمكن أن تشكل لنا أقصر مسار، و نقوم برسمه على البيان بخط مزدوج لتمييزه عن غيره من الأقواس.

ثم نتقل الى القمة x_{n-2} و نقوم بنفس الخطوات حتى ننتهي من فحص جميع الأقواس، و حينها يتحدد لنا المسار المطلوب الذي يعرض على النحو:

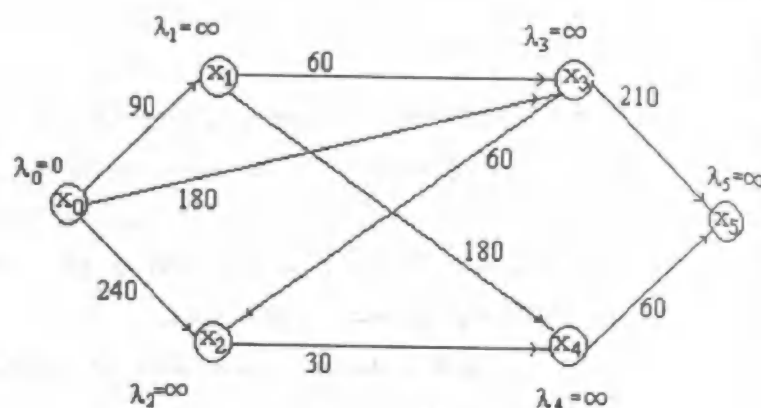
$$u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

و بعد الإنتهاء نستبين الخطوط المزدوجة التي تشكل لنا المسار الموصل الى القمة النهائية.

مثال 2-12: أوجد حل لإشكالية المثال 1-12

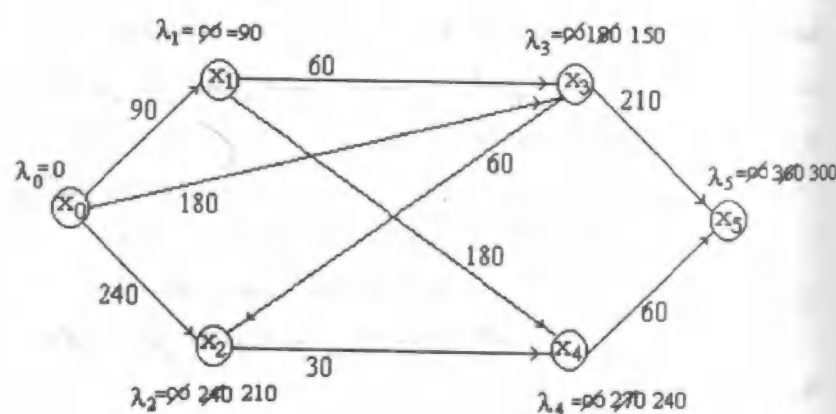
1- نعيد تسمية قمم البيان، حيث نضع مكان A أي مدخل البيان x_0 و مكان F أي مخرج البيان x_5 و نعيد تسمية بقية القمم كما في الشكل 2-12.

2- نضع $\lambda_0 = 0$ و $\lambda_i = \infty$ حيث: $i=1,2,3,4,5$ و هذا كما في الشكل التالي:



شكل 2-12

3- نتفحص الأقواس التي تنطلق من قمة كما يلي:



شكل 3-12

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_0 هي:

$$(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3)$$

عند القمة x_1 نجد:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > c(x_0, x_1) = 90 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + 90 - 0 + 90 = 90$$

نستبدل $\lambda_1 = \infty$ بالقيمة 90، و نضعها في مكانها على البيان.
عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > c(x_0, x_2) = 240 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_0 + 240 = 0 + 240 = 240$$

نستبدل $\lambda_2 = \infty$ بالقيمة 240، و نضعها في مكانها على البيان.
عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > c(x_0, x_3) = 180 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_0 + 180 = 0 + 180 = 180$$

نستبدل $\lambda_3 = ?$ بالقيمة 180، و نضعها في مكانها على البيان.
- الأقواس التي تنطلق من القمة x_1 هي:

$$(x_1, x_4), (x_1, x_3)$$

عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 180 - 90 = 90 > c(x_1, x_3) = 60 \Rightarrow \lambda_3 = 90 + 60 = 150$$

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \infty - 90 = \infty > c(x_1, x_4) = 180 \Rightarrow \lambda_4 = 90 + 180 = 270$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

$$(x_2, x_4)$$

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 270 - 240 = 30 = 30 \Rightarrow$$

لا نغير

بما أن النتيجة مساوية لطول القوس فلا نغير λ_4 .

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_3 هي:

$$(x_3, x_5), (x_3, x_2)$$

عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 240 - 150 = 90 > 60 \Rightarrow \lambda_2 = 150 + 60 = 210$$

في هذه الحالة نجد : $j=2$ و $i=3$ أي $j < i$ لذلك نعود من جديد لفحص الأقواس التي تنطلق من x_2 ثم نعود الى x_3 و نكمل الفحص.

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

$$(x_2, x_4)$$

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 270 - 210 = 60 > 30 \Rightarrow \lambda_4 = 210 + 30 = 240$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_3 هي:

$$(x_3, x_5)$$

عند القمة x_5 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 360 - 240 = 120 > 60 \Rightarrow \lambda_5 = 240 + 60 = 300$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_5 : لا ينطلق أي قوس من هذه القمة، و بالتالي فالقيمة $\lambda_5 = 300$ هي طول أقصر مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول (القمة الابتدائية و القمة النهائية).

في مثالنا ربما يمكن بسهولة معرفة الأقواس التي اتبعناها للوصول الى القمة النهائية. بمسافة تقدر بـ 300 كلم أي أقصر مسافة ممكنة، غير أنه لا يمكن ذلك في البيانات المعقدة، لذلك لابد من اتمام الخوارزمية في مرحلتها الثانية و هي مرحلة الإياب لتحديد المسار الذي تم عن طريقه قطع المسافة المذكورة.

مرحلة الإياب: وفيها نتفحص الأقواس التي تصل:

- الأقواس التي تصل الى القمة x_5 هي:

$$(x_3, x_5), (x_4, x_5)$$

من x_4 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 300 - 240 = 60$$

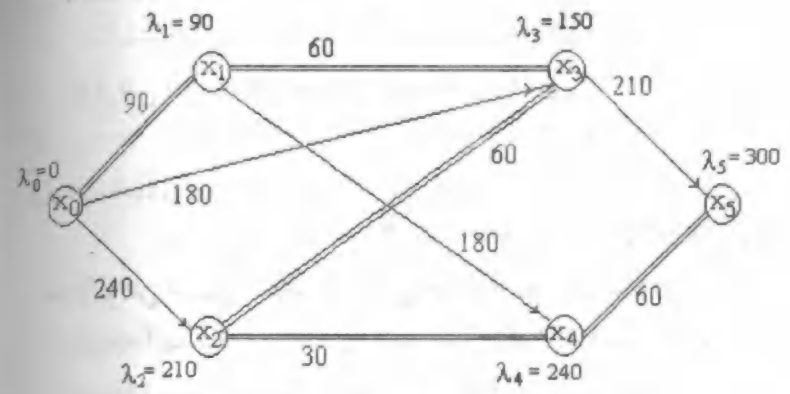
$$\lambda_5 - \lambda_4 = c(x_4, x_5)$$

فهي تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_4, x_5) ينتمي الى المسار الأقصر U، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_4, x_5) \in U$$

و نميزه بخط مزدوج كما يظهر في الشكل 4-12



شكل 4-12

من x_3 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_3 = 300 - 150 = 150 \neq 210$$

فهي لا تساوي طول القوس أي:

$$\lambda_5 - \lambda_3 \neq c(x_3, x_5)$$

فالقوس (x_3, x_5) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_3, x_5) \notin U$$

- الأقواس التي تصل الى القمة x_4 هي:

$$(x_2, x_4), (x_1, x_4)$$

من x_1 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_1 = 240 - 90 = 150 \neq 180$$

فهي لا تساوي طول القوس أي:

$$\lambda_4 - \lambda_1 \neq c(x_1, x_4)$$

فالقوس (x_1, x_4) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_1, x_4) \notin U$$

من x_2 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 240 - 210 = 30 = c(x_2, x_4)$$

فالقوس (x_2, x_4) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_2, x_4) \in U$$

- الأقواس التي تصل الى القمة x_3 هي:

$$(x_0, x_3), (x_1, x_3)$$

من x_1 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 150 - 90 = 60$$

$$\lambda_3 - \lambda_1 = c(x_1, x_3)$$

فهي تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_1, x_3) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_1, x_3) \in U$$

من x_0 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_0 = 150 - 0 = 150$$

$$\lambda_3 - \lambda_0 \neq c(x_3, x_0)$$

فهي لا تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_3, x_0) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_3, x_0) \notin U$$

- الأقواس التي تصل الى القمة x_2 هي:

$$(x_0, x_2), (x_3, x_2)$$

من x_3 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 210 - 150 = 60$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = c(x_3, x_2)$$

فهي تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_3, x_2) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_3, x_2) \in U$$

من x_0 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_0 = 210 - 0 = 210$$

$$\lambda_2 - \lambda_0 \neq c(x_0, x_2)$$

فهي لا تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_0, x_2) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_0, x_2) \notin U$$

- الأقواس التي تصل الى القمة x_1 هي:

$$(x_0, x_1)$$

من x_0 نجد:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 90 - 0 = 90$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = c(x_0, x_1)$$

فهو تساوي طول القوس أي:

فالقوس (x_0, x_1) ينتمي إلى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

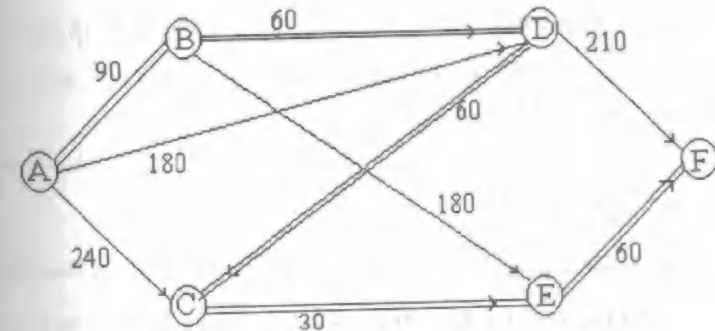
$$(x_0, x_1) \in U$$

- الأقواس التي تصل إلى القمة x_0 : لا يوجد أي قوس، وبالتالي نكون قد فحصنا الأقواس التي تصل أية قمة.

و نكون بذلك قد حددنا المسار الأصغر الذي يمكن المرور عليه لأجل الوصول إلى نقطة النهاية (قسنطينة في مثالنا)، وهذا المسار هو:

$$U = [(x_0, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_5)]$$

نميز هذا المسار بخطوط مزدوجة ونعيد الشكل إلى أصله كما يظهر في الشكل 5-12.



شكل 5-12

حيث يجب المرور انطلاقاً من المدينة A بالمدين B، C، D، E وأخيراً F.

ب- البحث عن أطول مسار: للبحث عن أطول مسار ضمن بيان موجه و مقيم نعتمد على نفس مبدأ خوارزمية فورد كما تم التطرق إليها في حالة التدنئة إنما في اتجاه معاكس، وفق الخطوات التالية:

1- نعيد تسمية قمم البيان كما فعلنا في حالة البحث عن أقصر مسار أي على النحو التالي:
قمة الانطلاق نسميها x_0 .

القمة الموالية x_1 ، وهكذا حتى قمة الوصول أي قمة النهاية تكون x_{n-1} ، حيث أن العدد الكلي للقمم هو n .

2- بجانب القمة x_0 نضع $\lambda_0 = 0$ ، بجانب بقية القمم x_i حيث $i \neq 0$ نضع أيضاً القيمة $\lambda_i = 0$.

3- نفترض أن $c(x_i, x_j)$ هي حمولة (قيمة) القوس (x_i, x_j) .

مرحلة الخصال:

4- في كل قمة x_j تكون فيها:

$$(\lambda_j - \lambda_i) < c(x_i, x_j)$$

$$\lambda_i + c(x_i, x_j)$$

نعوض λ_j بالقيمة:

5- نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j .

مرحلة الإياب:

6- نبدأ من قمة الوصول x_{n-1} ونطرح من القيمة λ_{n-1} قيمة λ_p الموجودة في الأطراف الابتدائية للأقواس التي تصل إلى x_{n-1} ، و نأخذ القوس الذي تكون فيه:

$$(\lambda_{n-1} - \lambda_p) = c(x_i, x_j)$$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس التي تشكل لنا أطول مسار، نقوم برسمه على البيان بخط مزدوج لتمييزه عن غيره من الأقواس.

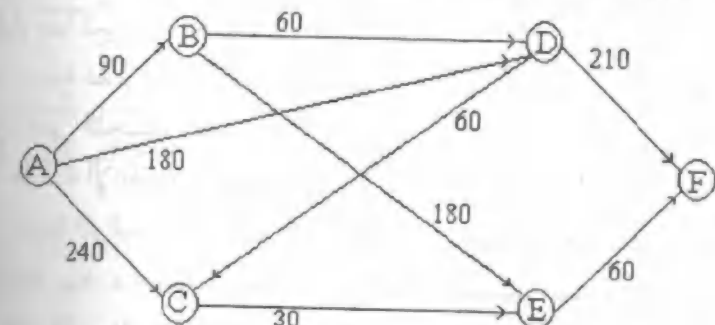
ثم نتقل إلى القمة x_{n-2} و نقوم بنفس الخطوات حتى ننتهي من فحص جميع الأقواس، و حينها يتحدد لنا المسار المطلوب الذي يعرض على النحو:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

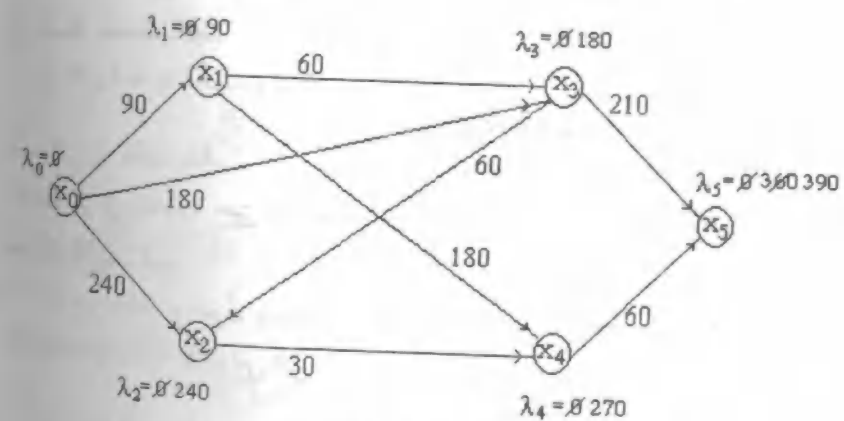
و بعد الإنتهاء نستبين الخطوط المزدوجة التي تشكل لنا أطول مسار موصل الى القمة النهائية.

مثال 12-3: أوجد أطول مسار يربط بين المدينة A والمدينة F ، للبيان 1-12.

البيان المشار اليه هو :



بتطبيق الجزء الإعدادي من الخوارزمية و القيام بتحويلات الخوارزمية نحصل على الشكل التالي:



شكل 12-6

نفحص الأقواس التي تسقط خارجيا و داخليا:

1- الأقواس التي تسقط: (مرحلة الخصائص):

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_0 هي:

(x_0, x_3) ، (x_0, x_2) ، (x_0, x_1)

عند القمة x_1 نجد:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0 < 90 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + 90 = 0 + 90 = 90$$

أي نستبدل $\lambda_1 = 0$ بالقيمة 90.

عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0 < 240 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_0 + 240 = 0 + 240 = 240$$

عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0 < 180 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_0 + 180 = 0 + 180 = 180$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_1 هي:

(x_1, x_4) ، (x_1, x_3)

عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 180 - 90 = 90 > 60 \Rightarrow \lambda_3 \text{ لا تتغير}$$

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_1 = 0 - 90 = -90 < 180 \Rightarrow \lambda_4 = 90 + 180 = 270$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

(x_2, x_4)

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 270 - 240 = 30 = 30 \Rightarrow$$

لا تتغير

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_3 هي:

(x_3, x_5) ، (x_3, x_2)

عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 240 - 180 = 60 = 60 \Rightarrow \lambda_2 \text{ لا تتغير}$$

عند القمة x_5 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_3 = 0 - 180 = -180 < 210 \Rightarrow \lambda_5 = 180 + 210 = 390$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_4 هي:

(x_4, x_5)

عند القمة x_5 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 390 - 270 = 120 > 30 \Rightarrow \lambda_5 \text{ لا تتغير}$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_5 : لا ينطلق أي قوس من هذه القمة، و بالتالي فالقيمة $\lambda_5 = 390$ هي طول أطول مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول (القمة الابتدائية و القمة النهائية).

مرحلة الأياض: وفيها نتفحص الأقواس التي تصل:

- الأقواس التي تصل الى القمة x_5 هي:

$$(x_3, x_5), (x_4, x_5)$$

من x_4 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 390 - 270 = 120 \neq 60 \Rightarrow (x_4, x_5) \notin U$$

فالقوس (x_4, x_5) لا ينتمي الى المسار الأطول U .

$$(x_4, x_5) \notin U$$

من x_3 نجد:

$$\lambda_5 - \lambda_3 = 390 - 180 = 210 = 210 \Rightarrow (x_3, x_5) \in U$$

فالقوس (x_3, x_5) ينتمي الى المسار الأطول U و نميزه بخط مزدوج.

- الأقواس التي تصل الى القمة x_4 هي:

$$(x_2, x_4), (x_1, x_4)$$

من x_1 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_1 = 270 - 90 = 180 = 180$$

فهي تساوي طول القوس أي:

$$\lambda_4 - \lambda_1 = c(x_1, x_4)$$

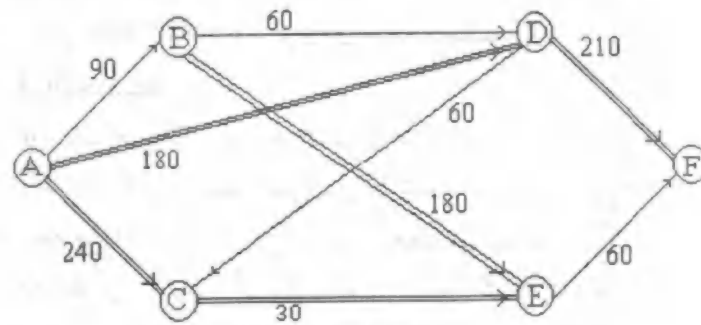
فالقوس (x_1, x_4) ينتمي الى المسار الأطول U ، و نكتب ذلك كما يلي:

من x_2 نجد:

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 270 - 240 = 30 = c(x_2, x_4)$$

فالقوس (x_2, x_4) ينتمي الى المسار الأطول U و نميزه أيضا بخط مزدوج. و نستمر حتى نفحص كل الأقواس التي تصل، و نرسم الأقواس التي تنتمي الى المسار بخط مزدوج، و يكون أقصر مسار هو

عبارة عن سلسلة الأقواس المزدوجة التي تربط القمة الابتدائية بالقمة النهائية، كما يظهر في الشكل التالي:



شكل 7-12

من الشكل يظهر أن أطول مسار يصل من القمة الابتدائية الى القمة النهائية هو الذي ينطلق من A و يمر بـ D و يصل أخيرا الى F بمسافة تقدر بـ 390 كلم.

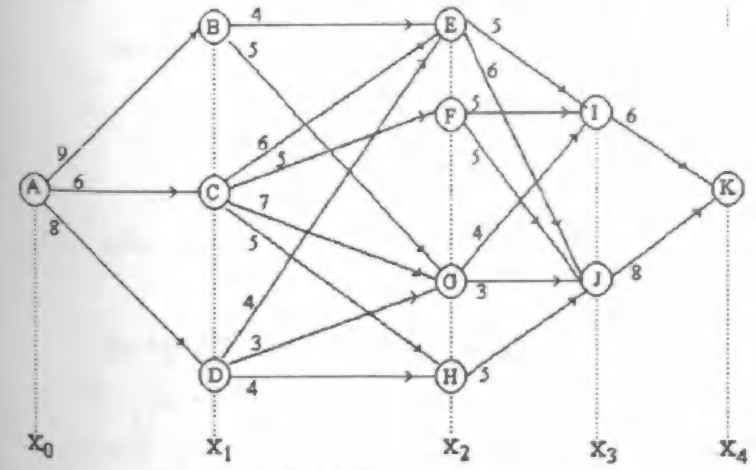
لاحظ أننا أهملنا الأقواس AC، CE و BE لأنها لا توصلنا الى القمة F إنطلاقا من القمة A كما يظهر في الشكل 7-12 أعلاه.

2- طريقة الفحص التتابعي للمسارات الجزئية: تقوم هذه الطريقة على أساس فحص المسارات الجزئية المتتالية واختيار المسار الذي يوصل الى القمة النهائية بأقل أو أكبر قيمة ممكنة حسب الحالة ، و لتوضيح ذلك نعطي المثالين التاليين، مرة في حالة التدنئة، و أخرى في حالة التعظيم.

أ- حالة التدنئة:

مثال 12-4 : بافتراض أننا نريد إنشاء طريق سيار بين المدينتين A و K، بحيث يمكن لهذا الطريق أن يمر بين بعض المدن من ضمن مجموعة من المدن التي تبين المخططات أنه يمكن اتخاذها كمعابر لهذا الطريق، غير أن تكاليف إنجاز كل شطر بين كل مدينة و أخرى تختلف تبعاً لاختلاف المسافات والطبيعة الجيوفيزيائية، والشكل 8-12 يظهر إمكانيات الربط بين مختلف هذه المدن و التكاليف المتوقعة لإنجاز كل شطر.

إن الهدف هو تحديد المسار الذي ينبغي أن نسلكه لإنجاز الطريق بأقل تكلفة ممكنة مع تحديد المدن التي يمر عبرها. ملاحظة: التكاليف معطاة بملايين الدينارا.



شكل 8-12

لتحديد المسار ذي التكلفة الأقل بين المدينتين A,K بطريقة الفحص التالي للمسارات الجزئية، فإننا نقوم بتقسيم البيان الى عدة أجزاء يضم كل جزء مجموعة من القمم تشكل مرحلة من المراحل، و ذلك كما هو واضح في البيان أعلاه، حيث جعلنا:

المرحلة الابتدائية: $X_0 = \{A\}$

المرحلة الأولى: $X_1 = \{B, C, D\}$

المرحلة الثانية: $X_2 = \{E, F, G, H\}$

المرحلة الثالثة: $X_3 = \{I, J\}$

المرحلة الرابعة: $X_4 = \{K\}$

بناء على هذا التقسيم للقمم يتم تحديد المسارات الجزئية بين القمم و اختيار أصغر مسار في كل مرحلة و ذلك على نحو الجدول التالية:

اختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_1 = \{B, C, D\}$

X_1	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر	تكلفة المسار الأصغر
B	AB	9	AB	9
C	AC	6	AC	6
D	AD	8	AD	8

جدول 2-12

اختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_2 = \{E, F, G, H\}$

نأخذ المسارات الصغرى من الجدول السابق و نربطها بالأقواس الموالية.

X_2	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر المختار	تكلفة المسار الأصغر
E	ABE	13	ACE	12
	ACE	12	ADE	12
	ADE	12		
F	ACF	11	ACF	11
G	ABG	14	ADG	11
	ACG	13		
	ADG	11		
H	ACH	11	ACH	11
	ADH	12		

جدول 3-12

بعد هذه المرحلة نفحص المسارات التي تكمل المسارات المثلى في الجدول السابق و التي تصل الى قمم المرحلة الثالثة و نختار أقلها أيضا.

لاحظ أن تكلفة المسار حسب مجموع تكاليف كل قوس ينتمي الى المسار.

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_3 = \{I, J\}$

تكلفة المسار الأصغر	المسار الأصغر المختار	التكلفة	المسارات الممكنة	X_3
15	ADGI	17	ACEI	I
		17	ADEI	
		16	ACFI	
		15	ADGI	
14	ADGJ	18	ACEJ	J
		18	ADEJ	
		16	ACFJ	
		14	ADGJ	
		16	ACHJ	

جدول 4-12

لاحظ في الجدول أنه لا يوجد مسار ACHI لأنه لا يوجد على البيان. بنفس الطريقة السابقة، نفحص الآن المسارات التي تكمل المسارات الجزئية المختارة و التي توصل الى المرحلة الرابعة و الأخيرة.

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_4 = \{K\}$

تكلفة المسار الأصغر	المسار الأصغر المختار	التكلفة	المسارات الممكنة	X_4
21	ADGIK	21	ADGIK	K
		22	ADGJK	

جدول 5-12

بما أنه لا توجد مرحلة أخرى لذلك فإن المسار ذي التكلفة الدنيا الذي يربط بين القمة A و القمة K هو المسار ADGIK ، حيث تقدر التكلفة الدنيا للربط بـ 21 مليون دينار، و يمر هذا المسار على المدن التالية:



شكل 9-12

و يلاحظ أن هذا المسار لم يمر على جميع المدن بل على بعضها فقط، و هذا ما يميز مسائل المسارات المثلى على مسائل الشجرة المثلى كما تمت الإشارة الى ذلك في الفصل السابق.

ب- حالة التعظيم: في حالة التعظيم يمكن أيضا استخدام طريقة الفحص التتابعي بطريقة مشابهة لحالة التدنئة، و الفارق فقط هو في إختيار المسار الأمثل، فبدل ما نختار المسار الأصغر نختار المسار الأكبر، و فق منهجية المثال التالي:

مثال 5-12: بالاعتماد على بيان المثال السابق، و بافتراض أن حولة الأقواس عبارة عن العوائد التي يمكن أن نجنيها سنويا بملايين الدينارات، و أن الهدف هو البحث عن المسار الأمثل الذي يجعلنا نحصل على أعلى العوائد، فإننا في هذه الحالة أيضا نطبق نفس الطريقة السابقة، و الاختلاف فقط هو في إختيار المسارات الجزئية إذ يتم هنا إختيار أكبرها و ليس أصغرهما، وذلك كما يلي:

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_1 = \{B, C, D\}$

العائد الأكبر	المسار الأكبر	عائد المسار	المسارات الممكنة	X_1
9	AB	9	AB	B
6	AC	6	AC	C
8	AD	8	AD	D

جدول 6-12

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_2 = \{E, F, G, H\}$

العائد الأكبر	المسار الأكبر المختار	عائد المسار	المسارات الممكنة	X_2
13	ABE	13	ABE	E
		12	ACE	
		12	ADE	
11	ACF	11	ACF	F
14	ABG	14	ABG	G
		13	ACG	
		11	ADG	
12	ADH	11	ACH	H
		12	ADH	

جدول 7-12

بعد هذه المرحلة نفحص المسارات التي تكمل المسارات المثلى في الجدول السابق و التي تصل الى قمم المرحلة الثالثة و نختار أكبرها أيضا.

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_3 = \{I, J\}$

العائد الأكبر	المسار الأكبر المختار	عائد المسار	المسارات الممكنة	X_3
18	ABEI	18	ABEI	I
		16	ACFI	
		18	ABGI	
19	ABEJ	19	ABEJ	J
		16	ACFJ	
		17	ABGJ	
		17	ADHJ	

جدول 8-12

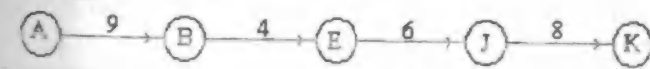
بنفس الطريقة السابقة، نفحص الآن المسارات التي تكمل المسارات الجزئية المختارة و التي توصل الى المرحلة الرابعة و الأخيرة.

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_4 = \{K\}$

العائد الأكبر	المسار الأكبر المختار	العائد	المسارات الممكنة	X_4
27	ABEJK	24	ABEIK	K
		24	ABGIK	
		27	ABEJK	

جدول 9-12

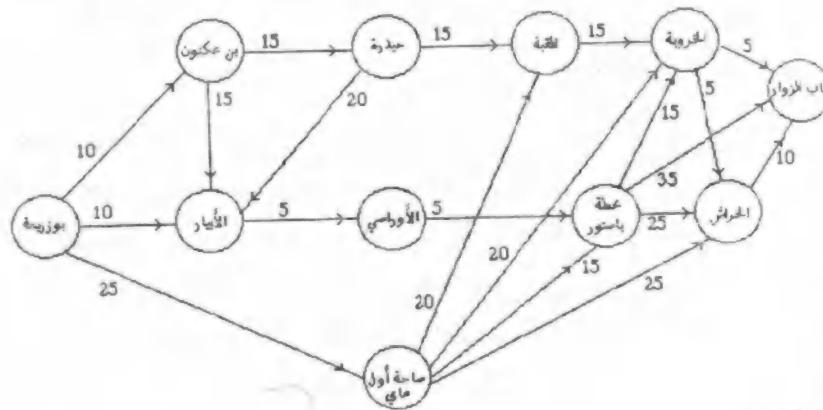
بما أنه لا توجد مرحلة أخرى لذلك فإن المسار ذو العائد الأعلى و الذي يربط بين القمة A و القمة K هو ABEJK و يكون أكبر عائد محصل عليه هو 27 مليون دينار، و يتم المرور عبر المدن الواضحة في الشكل أدناه:



شكل 10-12

تمارين.

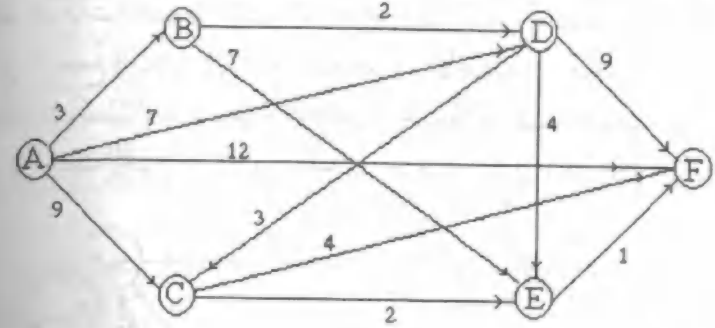
تمرين 1: تريد شركة النقل الحضري لمدينة الجزائر إحداث خط نقل بالحافلات بين ملحقة جامعة الجزائر ببوزريعة وجامعة باب الزوار، مع اشتراط قطع المسافة بينهما في أقصر وقت ممكن. مخطط شبكات الخطوط بالشركة إشتراط أيضا المرور على الأقل ببعض مراكز التجمع الطلابي في مختلف المعاهد و الأحياء الجامعية. الشبكة الممكن أن يقترح خلالها الخط و كذا الوقت المستغرق بين كل منطقة تجمع طلابي و آخر موضحة في الشكل التالي:



المطلوب:

- 1- ما هو المسار الذي تقترحه على الشركة و الذي يربط ببوزريعة باب الزوار بأدنى فترة زمنية تقطعها الحافلة باستخدام طريقي فور و الفحص التساعي.
- 2- حدد مراكز التجمع الطلابي التي يتم إعتبارها محطات رئيسية للحافلات.
- 3- بافتراض أن حافلات الشركة كانت قبل هذا تسلك المسار ذي الأطول فترة زمنية بين ببوزريعة و باب الزوار، حدد هذا المسار و إحسب الفترة الزمنية الأطول، ثم إحسب الفترة المقتصدة بين أطول مسار و أقصره.

تمرين 2: تريد شركة نقل خاصة بالتموين بالمواد الغذائية إحداث خط نقل دائم لتموين المنطقة F بالمواد الغذائية انطلاقاً من العاصمة الاقتصادية A، فإذا كانت شبكة الطرق الممكن المرور بها والمسافة بين كل مدينة وأخرى بمئات الكيلومترات كما في البيان التالي:



المطلوب:

- 1- ما هو أقصر مسار تتخذه قوافل النقل مسلوكاً لها؟ أوجد الحل بطريقتين، وحدد المدن الممكن المرور بها.
- 2- إذا كانت الشركة تحقق ربحاً مقداره 10 دج عن كل كيلومتر ماض المسار الذي تقترحه عليها لتحصل على أعلى ربح ممكن. ما مقدار هذا الربح وما هي المدن التي يتم المرور عبرها. استخدم طريقة فورد و طريقة الفحص المتتابع لإيجاد الحل.

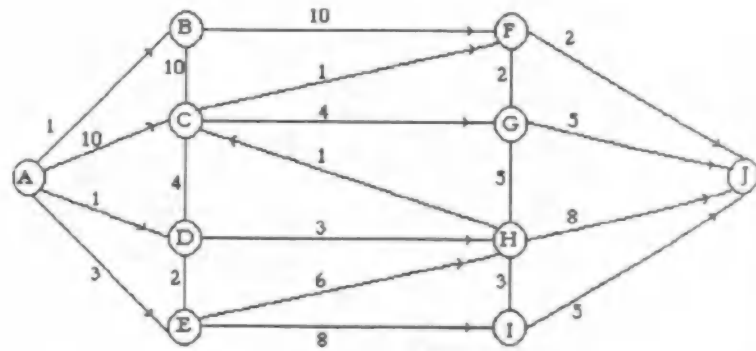
تمرين 4: رئيس دائرة يريد جعل بعض القرى الكثيفة السكان التي تنتمي إلى دائرته مقرات بلدية، هذه القرى تقع في مناطق متباعدة ومعزولة عن بعضها البعض، وقع خلاف على أي القرى تصبح مقرات بلدية، فقرر أن يلجأ إلى التحكيم التقني-الاقتصادي ومفاد هذا التحكيم هو أن إنشاء أية بلدية مرهون بأقل تكلفة لإنشاء طريق ينطلق من مقر الدائرة x_0 إلى بعض القرى ليصل في النهاية إلى القرية x_5 التي لا خلاف في جعلها مقر

بلدية بحيث أن أية قرية يمر بها تكون مرشحة. فإذا كان الجدول التالي يوضح مختلف القرى وتكاليف إنشاء الطرق بينها،

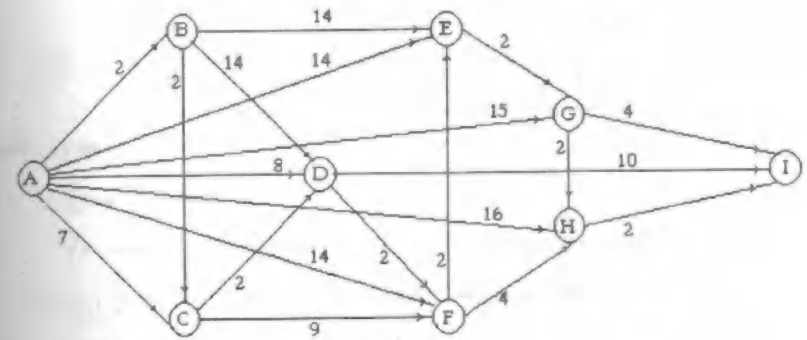
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	-	6	1	10	30	17
x_1	-	-	-	4	60	7
x_2	-	-	-	7	2	-
x_3	-	-	-	-	6	1
x_4	-	-	-	-	-	9
x_5	-	-	-	-	-	-

المطلوب:

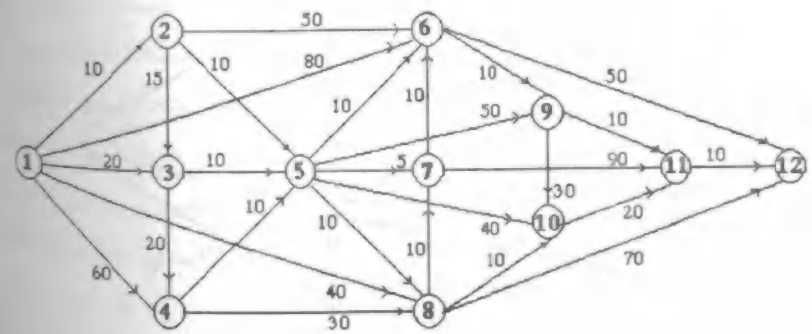
- 1- ارسم البيان.
 - 2- باستخدام خوارزمية فورد و خوارزمية الفحص المتتابع، أوجد أقل تكلفة لإنشاء الطريق المطلوب.
 - 3- حدد القرى المرشحة لأن تكون مقرات بلدية.
- تمرين 5:** أوجد أقصر مسار بين القمتين A و J للبيان التالي بطريقتي فورد و الفحص المتتابع، ثم أوجد أطول مسار بالطريقتين.



تمرين 6: أوجد أقل مسار يربط بين القمة A والقمة I، ماهو طول هذا المسار.
عند حذف القمة I ماهو أقصر مسار يربط بين القمة A والقمة H.
للحل استخدم خوارزمية فورد ثم طريقة الفحص التتابعي.



تمرين 7: تريد شركة تصدير المحروقات إنجاز أنبوب لنقل الغاز من المدينة 1 الى ميناء التصدير 12، الدراسات بينت المسافات بالكيلومتر لإمكانات الربط المختلفة مع المرور بمجموعة من المدن، كما هو واضح في البيان التالي:



والمطلوب

إذا قررت الشركة انشاء الأنبوب عبر المسار الأقل. ماهي مسافة الأنبوب حيثذ، و ماهي المدن التي يمر عبرها. أوجد الحل بالطريقتين.

2- إذا كانت الشركة تحني أرباحها إجمالية تقدر بـ 4 آلاف دينار للكيلومتر الواحد سنوياً، ماهو المسار الذي تقترحه عليها لجني أعلى الأرباح و ماهي المدن التي يجب المرور عليها. أوجد الحل بالطريقتين.

الفصل الثالث عشر نظرية التدفق الأعظمي

خوارزمية فورد-فلكرسون FORD-FUICKERSON

نستخدم نظرية التدفق الأعظمي خاصة في شبكات النقل الطولية، و نقصد بشبكة النقل كل بيان بدون دائرة يحتوي على مدخل (القمة الابتدائية) نسميه E و مخرج (القمة النهائية) نسميه S، تكون فيه الأقواس مقيمة بأرقام تدل على طاقة كل منها، بحيث القمة E تنطلق منها الأقواس ولا يصل إليها أي قوس، بينما القمة S تصل إليها الأقواس و لا ينطلق منها أي قوس.

و نقصد بالتدفق الأعظمي أكبر إرسال ممكن بين مجموعة من المنابع ومجموعة من المصببات تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في الشبكة.

ولإيجاد التدفق الأعظمي بين هذه المنابع و هذه المصببات يتم استخدام خوارزمية تسمى خوارزمية فورد-فلكرسون. فالمشكلة التي تعالجها خوارزمية فورد-فلكرسون هي البحث عن إمرار أكبر كمية ممكنة من المادة المراد نقلها عبر الأقواس المحدودة الطاقة الى نقطة الخروج S دون اعتبار للتكاليف و التي لا تظهر أصلا في الشبكة.

إن المادة المنقولة يمكن أن تكون بضائع تنقل من مناطق مختلفة على ظهور بواخر طاقة نقلها محدودة الى مناطق أخرى تكون فيها أيضا طاقة الاستقبال محدودة، وقد تكون المادة المنقولة سوائل عبر أنابيب طاقة تصريفها محدودة الى خزانات رئيسية أو مناطق استهلاكية طاقة استقبالتها أيضا محدودة... الخ، و الأقواس يمكن أن تكون أنابيب لنقل الماء أو الغاز أو البترول، و يمكن أن

تكون أسلاك ربط كهربائي أو هاتفي، كما يمكن أن تعبر عن حمولة بواخر أو طائرات أو شاحنات أو غير ذلك.

أولاً: طرح المسألة: تطرح مسائل التدفق الأعظمي على نحو المثال التالي:

مثال 1-13: مؤسسة لديها ثلاثة خزانات رئيسية للمياه هي A, B, C لتموين أربع قرى هي D, E, F, G، بحيث أن الخزان A يستطيع تصريف 45 لتر/ثا، والخزان B يستطيع تصريف 25 لتر/ثا، والخزان C يستطيع تصريف 20 لتر/ثا. بينما تقدر احتياجات القرية D بـ 30 لتر/ثا، والقرية E 10 لتر/ثا، والقرية F 20 لتر/ثا.

توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى طاقة تصريف كل منها محدودة وهي موضحة في الجدول التالي:

طاقة تصريف الأنابيب/لتر/ثانية

المصب	D	E	F	G
المبع				
A	10	15	-	20
B	20	5	15	-
C	-	-	10	10

جدول 1-13

و تكون الإشكالية هي البحث عن أفضل تموين ممكن لمختلف القرى عبر شبكة النقل المتاحة، أي إيجاد أعظم تدفق ممكن من الخزانات الثلاثة الى القرى الأربعة في وجود قيود طاقة التصريف للأنابيب.

ثانياً: خوارزمية الحل: لحل مثل هذه المسألة تتبع خوارزمية تسمى خوارزمية فورد فلكرسون Ford-Fulkerson، خطواتها كما يلي:

1- **رسم البيان:** يتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

أ- نحدد نقطة ما نسميها مدخل البيان و نرمز لها بـ E

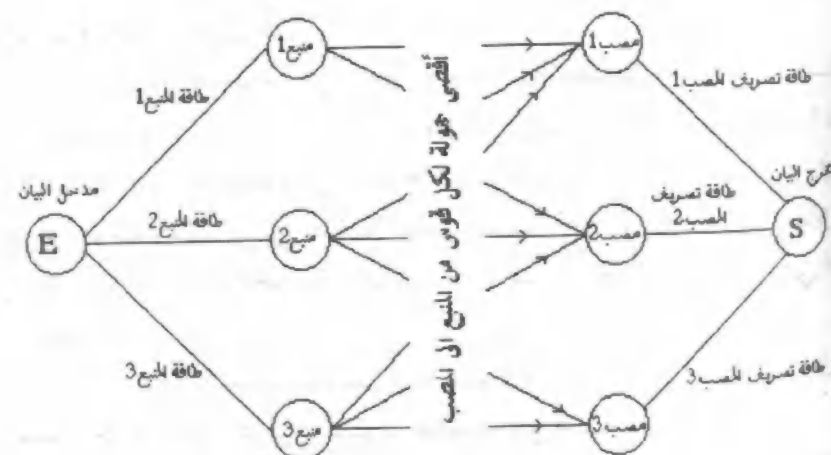
ب- نحدد قمم المنابع i ثم نصل بين قمة المدخل و قمم المنابع بأقواس طاقة كل منها أي حمولتها تساوي طاقة تصريف كل منبع.

ج- نحدد قمم المصبات (الى اليمين من المنابع)، ونصلها بالمنابع عن طريق أقواس و نحدد طاقة تصريف كل قوس.

د- نحدد نقطة أخرى خارج البيان الى اليمين من المصبات و نسميها مخرج البيان و نرمز لها بـ S.

هـ- نصل النقطة S بمختلف المصبات بأقواس طاقة تصريفها تساوي طاقة استقبال كل مصب.

و يصبح البيان كما يلي:



شكل 1-13

2- البعث من أمثل تدفق:

1- نبدأ من الأقواس التي تخرج من قمة المدخل، و نقوم بإرسال تدفق ما مع مراعاة ضرورة تسوية الوضعية عند كل قمة بحيث تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة (قاعدة كورشوف)، و دون تجاوز قدرة نقل كل قوس.

2- نقوم بتحسين التدفق حتى يكون كل مسار من المدخل E حتى المخرج S يحتوي على الأقل على قوس مشبع واحد (تدفق كامل)، و هذا حسب منهجية الخطوة 3 أدناه. (نقصد بالقوس المشبع أنه ينقل كمية تساوي تمامًا طاقة نقله القصوى)

3- ننتقل من القمة E و نجري ما يلي:

أ- نوسم القمة E بالإشارة + و نطرح السؤال التالي:

ب- هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة z؟ إذا كان الجواب نعم نضع بجوار القمة z العلامة (+z)، إذا كان الجواب لا فإننا نقوم بطرح السؤال التالي:

ج- هل يوجد قوس غير معدوم ينطلق من قمة ما k الى القمة i، إذا كان الجواب نعم نضع بجوار القمة k العلامة (-i)، ثم نعود الى طرح السؤال ب من جديد و في كل مرة نوسم القمة التي نصل اليها ب + أو - القوس السابق أو اللاحق حسب الحالة دون إعادة توسيم القمم التي تم توسيمها من قبل.

د- إذا استحال الإجابة و كنا لم نصل الى توسيم المخرج S فإن التدفق يكون أعظمي، و الحل صار أمثلاً. هـ- إذا وصلنا الى توسيم القمة S فإن التدفق يكون غير أعظمي و ينبغي تحسينه.

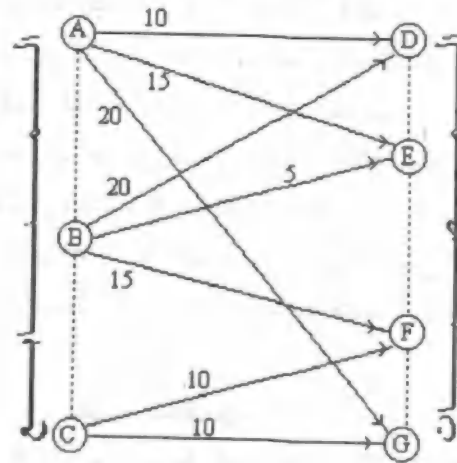
و- إذا كنا أمام الحالة السابقة (الحالة هـ) نقوم بتحديد السلسلة الموسمة و نبدأ بتحسين الحل بإضافة أو انقاص أنسب كمية من الأقواس بحيث ينبغي مراعاة عدم تجاوز الطاقة القصوى للأقواس و عدم إحداث أقواس بقيمة سالبة. ل- نعود من جديد الى الخطوة ب.

ق- نكون امام التدفق الأعظمي لما يستحيل توسيم القمة S وفق الخوارزمية أعلاه (نقوم حينئذ بفصل القمم الموسمة عن غير الموسمة بقاطع، و تكون قيمة التدفق الأعظمي هي مجموع الأقواس التي تربط بين القمم الموسمة و القمم غير الموسمة المفصولة بالقاطع).

مثال 13-2: أوجد حل المسألة الواردة في المثال السابق.

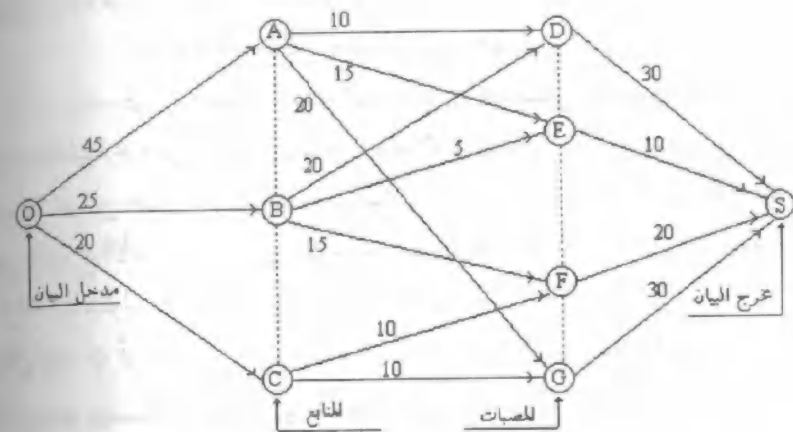
أ- رسم بيان التدفق الأعظمي:

بتطبيق الشطر الأول من الخوارزمية نحصل على البيان الأساسي الذي يظهر لنا طاقة تصريف كل أنبوب و هو التالي:



شكل 13-2

بإضافة القمتين المساعدين، قمة الدخول وقمة الخروج، نحصل على البيان المطلوب في الخوارزمية وهو:



شكل 13-3

و يلاحظ في هذا البيان أننا أضفنا قمتين افتراضيتين، القمة الأولى على يسار البيان سميناها قمة الدخول E و الثانية على اليمين و سميناها قمة الخروج S، و القمم A, B, C عبارة عن منابع طاقة تصريفها تعبر عنها حمولة الأقواس التي تصل من القمة E، بينما القمم D, E, F, G عبارة عن المصببات طاقة استقبالها تعبر عنها حمولة الأقواس التي تصل الى القمة S، بينما الأقواس التي تربط المصادر بالمصببات فتعبر عن طاقة تصريف الأنابيب.

ج- البحث عن أمثل تدفق:

- نبدأ من القمة E، نرسل أية كمية نشاء، مع مراعاة قدرات تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية، فلو نرسل عبر القوس EC الكمية 20 ل/ثا، فإنه يمكن تصريفها كلية عبر

الأقواس CG و CF كليهما بمقدار 10 ل/ثا، و كذلك يمكن للكمية التي تمر عبر القوس CG بمقدار 10 ل/ثا أن تصل كلية الى القمة S عبر القوس GS و كذلك الكمية التي تمر عبر القوس CF يمكن لها أن تصل كلية الى S عبر القوس FS، فلنعمل:

• نمرر الكمية 20 ل/ثا عبر القوس EC و بذلك يشبع كلية، (نميز القوس المشبع بخط مزدوج). يمكن امرار الكمية التي وصلت الى القمة C و هي 20 ل/ثا كما يلي:

- نمرر 10 ل/ثا عبر القوس CG و بذلك يشبع هذا القوس، ثم نمرر الكمية التي وصلت الى G و هي بمقدار 10 ل/ثا الى S عبر القوس GS، لكن يلاحظ ان الطاقة القصوى لهذا القوس هي 30 ل/ثا، و يعني ذلك أن هذا القوس لم يشبع في هذه المرحلة إذ يبقى قادرا على تصريف 20 ل/ثا أي $20 = 30 - 10$ ، لذلك نشطب القيمة 30 و نضع أمامها 20 و هي طاقة التصريف المتبقية (انظر الشكل 13-4).

- نعود الى القمة C و نمرر الكمية المتبقية و هي 10 ل/ثا عبر القوس CF و بذلك يشبع هذا القوس، ثم نصرف الكمية التي وصلت الى القمة F عبر القوس FS فيبقى لهذا القوس طاقة تصريف زائدة تقدر بـ 10 ل/ثا، لذلك نشطب 20 و نضع أمامها الطاقة المتبقية و هي 10 ل/ثا.

لحد الآن تم تصريف كل الكمية التي عبرت من خلال القوس EC و وصلت الى القمة S.

• نعود الآن الى القمة E

نمرر الكمية 25 ل/ثا عبر القوس EB و بما أن طاقة تصريفه تساوي هذه الكمية لذلك فإن هذا القوس يشبع. الكمية التي تصل الى القمة B هي إذن 25 ل/ثا يمكن امرارها عبر الأقواس التي تخرج من هذه القمة كما يلي:

- نمرر 5 ل/ثا عبر القوس BE و يشبع بذلك هذا القوس لأن طاقة تصريفه القصوى تساوي 5 ل/ثا و تكون الكمية التي تصل القمة E هي إذن 5 ل/ثا يمكن امرارها الى القمة S عبر القوس ES وحيث أن طاقة تصريف هذا القوس هي 10 ل/ثا لذلك فإنه لا يشبع لذلك نشطب عن القيمة 10 و نضع بدلها طاقة التصريف المتبقية و هي 5 ل/ثا. بقي في القمة B لحد الآن 20 ل/ثا.

- طاقة القوس BF هي 15 ل/ثا لكن القوس الذي يليه و هو FS طاقة تصريفه المتبقية هي فقط 10 ل/ثا، لذلك فأقصى ما يمكن تمريره عبر القوس BF هو 10 ل/ثا تمر مباشرة الى S عبر القوس FS و بذلك يشبع هذا القوس تماما بينما القوس BF لا يشبع و تبقى طاقة تصريف فائضة تقدر بـ 5 ل/ثا.

- من الكمية التي وصلت B و هي 25 ل/ثا تم تصريف 10 ل/ثا عبر BF و 5 ل/ثا عبر BE و تبقى 10 ل/ثا يتم تصريفها عبر BD و يتم تمريرها الى S عبر BD و تبقى طاقة تصريف غير مستغلة عبر القوس BD تقدر بـ 10 ل/ثا و عبر القوس DS تقدر بـ 20 ل/ثا. و يتم بذلك تصريف كل الكميات التي وصلت B.

• نعود من جديد الى القمة E حيث لازالت القيمة 45 ل/ثا لم تصرف فهل يمكن تصريفها كلية و إيصالها الى القمة S؟

- نلاحظ أن الأقواس التي تنطلق من A قيمتها (45=20+15+10) و هي قيمة تساوي القيمة التي يمكن إيصالها الى القمة A عبر القوس EA ، غير أنه يلاحظ من جهة أخرى أنه لو تم إمرار كل هذه الكمية فإنه لابد من الإشباع الكلي للأقواس AG, AE, AD و لو يتم ذلك فإن القوس ES لا يتحمل لأن الطاقة المتبقية له هي 5 ل/ثا حتى الآن، لذلك لا يمكن إمرار عبر AE سوى 5 ل/ثا و تبقى طاقة غير مستغلة عبره تقدر بـ 10 ل/ثا و يشبع بذلك القوس ES.

- بالنسبة لبقية الأقواس التي تنطلق من A لا يطرح أي مشكل.

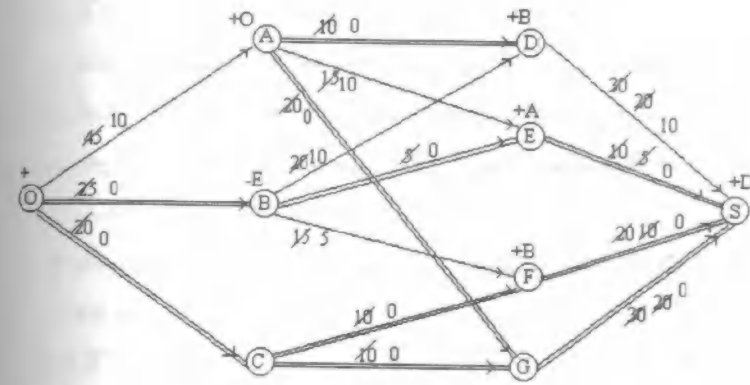
إذن لا يمكن إمرار عبر EA سوى الكمية 35 ل/ثا، ولا يشبع هذا القوس إذ تبقى طاقة زائدة مقدارها 10 ل/ثا.

فالكمية التي تصل A هي إذن 35 ل/ثا تصرف كما يلي:

- عبر AE 5 ل/ثا كما أشرنا أعلاه و لا يشبع هذا القوس، تمر هذه الكمية من E عبر القوس ES و يشبع هذا القوس.

- نمرر 20 ل/ثا عبر القوس AG و يشبع تماما، و تصرف الكمية التي وصلت الى G عبر GS حيث كانت هناك طاقة غير مستغلة متبقية تساوي 20 ل/ثا يتم إستغلالها و يشبع بذلك هذا القوس تماما.

- نمرر الكمية المتبقية و هي 10 ل/ثا عبر AD حيث يشبع هذا القوس تماما، ثم نصرف هذه الكمية من D عبر DS حيث لا يشبع هذا القوس و تبقى طاقة غير مستغلة فيه تساوي 10 ل/ثا.
و تكون بذلك كل الكميات التي خرجت من E و المقدرة بـ 80 ل/ثا قد وصلت الى القمة S.



شكل 4-13

ملاحظات:

- في كل قمة يجب أن تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة (قاعدة كورشوف).
- و كتأكيد على ذلك نجد:
- في القمة A الكمية التي تدخل هي 35 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر الأقواس AD, AE, AG تساوي أيضا 35 ل/ثا.
- في القمة B الكمية التي تدخل هي 25 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر الأقواس BD, BE, BF هي أيضا 25 ل/ثا.

- في القمة C الكمية التي تدخل هي 20 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر الأقواس CF, CG هي أيضا 20 ل/ثا.
- في القمة D الكمية التي تدخل هي 20 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر القوس DS هي 20 ل/ثا.
- في القمة E الكمية التي تدخل هي 10 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر القوس ES هي 10 ل/ثا.
- في القمة F الكمية التي تدخل هي 20 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر القوس FS هي 20 ل/ثا.
- في القمة G الكمية التي تدخل هي 30 ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر القوس GS هي 30 ل/ثا.
- اعتمادا على الملاحظة الأولى فإن ما يخرج من E يجب أن يساوي ما يصل الى S
- أن كل مسار من E الى S يحتوي على الأقل على قوس واحد مشبع (تدفق كامل).

إن التدفق الذي حصلنا عليه حتى الآن و الذي يظهره البيان في الشكل 4-13 هو تدفق يظهر حلا أساسيا أولا يمكن التعبير عنه بالجدول التالي:

الكمية المصروفة	G	F	E	D	المجموع
A	20	-	5	10	35
B	-	10	5	10	25
C	10	10	-	-	20
الكمية المستقبلة	30	20	10	20	80

جدول 2-13

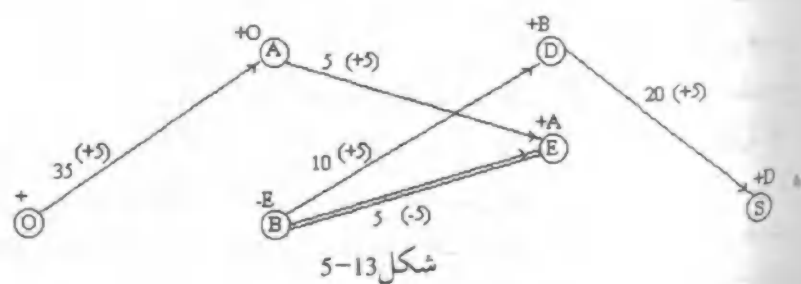
- و يظهر جليا أن ما تم تصريفه لحد الآن هو 80 ل/ثا، و تفسيره كما يلي:
- من الخزان A يرسل تدفق بقيمة 35 ل/ثا عبر:
 - الأنبوب AD بتدفق 10 ل/ثا.
 - الأنبوب AE بتدفق 5 ل/ثا.

- الأنبوب AG بتدفق 20ل/ثا.
 - من الخزان B يرسل تدفق بقيمة 25 ل/ثا عبر :
 - الأنبوب BD بتدفق 10ل/ثا.
 - الأنبوب BE بتدفق 5ل/ثا.
 - الأنبوب BF بتدفق 10ل/ثا.
 - من الخزان C يرسل تدفق بقيمة 20 ل/ثا عبر :
 - الأنبوب CF بتدفق 10ل/ثا.
 - الأنبوب CG بتدفق 10ل/ثا.
- و ما تم استقباله في القرى الثلاث أيضا هو 80ل/ثا و ذلك كما يلي:
- القرية D تستقبل 20 ل/ثا موزعة كما يلي:
 - عبر الأنبوب AD بطاقة 10ل/ثا.
 - عبر الأنبوب BD بطاقة 10ل/ثا.
 - القرية E تستقبل 10 ل/ثا موزعة كما يلي:
 - عبر الأنبوب AE بطاقة 5ل/ثا.
 - عبر الأنبوب BE بطاقة 5ل/ثا.
 - القرية F تستقبل 20 ل/ثا موزعة كما يلي:
 - عبر الأنبوب BF بطاقة 10ل/ثا.
 - عبر الأنبوب CF بطاقة 10ل/ثا.
 - القرية G تستقبل 30 ل/ثا موزعة كما يلي:
 - عبر الأنبوب AG بطاقة 20ل/ثا.
 - عبر الأنبوب CG بطاقة 10ل/ثا.
- و يلاحظ أن ما يخرج من الخزانات يساوي تماما ما يصل الى القرى.

ج- اختبار الحل و تحسينه:

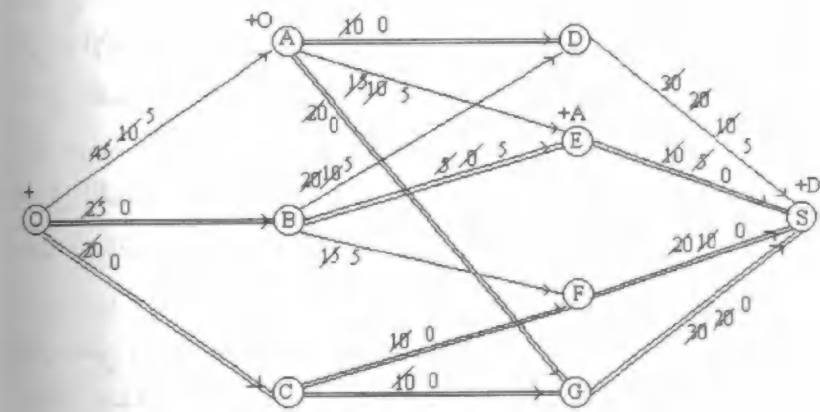
بعد الحصول على الحل الأساسي الأول يتم اختبار هذا الحل إذا كان أمثلا أم لا، و يتم ذلك بتطبيق المرحلة الثانية من خوارزمية فورد-فلكرسون، كما يلي:

- نوسم القمة E بالإشارة + ، و نطرح السؤال: هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة E ؟ الإجابة نعم و هو القوس EA: نضع بجوار القمة A الإشارة +E.
 - في القمة A : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة A ؟ الإجابة نعم هو القوس AE: نضع بجوار E الإشارة +A.
 - في القمة E : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة E ؟ الإجابة لا يوجد قوس غير مشبع ينطلق من E .
- نطرح السؤال الآخر و هو: هل يوجد قوس غير معدوم يصل الى E الإجابة نعم و هو BE ، نضع بجوار B الإشارة -E.
- في القمة B : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة B ؟ الإجابة نعم هو القوس BD: نضع بجوار D الإشارة +B.
 - في القمة D : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة D ؟ الإجابة نعم هو القوس DS: نضع بجوار S الإشارة +D.
- حسب الخوارزمية ما دمنا وصلنا الى توسيم القمة S فالتدفق غير أمثلي و لازال قابلا للتحسين.
- خلال عملية التوسيم مررنا على سلسلة الأقواس كما هي في الشكل التالي:



وهي سلسلة تبين لنا مسار تحسين الحل.

و لتحسين الحل ينبغي الزيادة في الأقواس EA , AE, BD, DS والإتقاص في القوس BE بحيث يسمح ذلك بتحقيق قاعدة كورشوف في كل قمة، و نلاحظ أنه لا يمكن تخفيض BE بأكثر من 5 ل/ثا لأن ذلك يؤدي الى قيمة سالبة، لذلك نضيف القيمة 5 الى كل أقواس السلسلة ما عدا القوس BE فإننا نطرح منه القيمة 5 و يصبح قوس صفري أي معدوم لا ينقل عبره شيء، و يصبح البيان الجديد كما يلي:



شكل 13-6

و نعيد التوسيم من جديد تماما كما فعلنا في المرحلة السابقة، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة E الإجابة نعم هو EA لذلك نوسم A بالإشارة +E، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة A الإجابة نعم و هو AE نوسم E بالإشارة +A، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة E الإجابة لا يوجد، لذلك نطرح السؤال البديل و هو هل يوجد قوس غير معدوم (قوس به حمولة) يصل الى E، الإجابة لا يوجد، وبالتالي فإنه إستحال علينا الوصول الى توسيم قمة الخروج S و عليه

فالحل المتوصل اليه هو حل أمثل، أي أننا وصلنا الى أعظم تدفق و هو ما يوضحه الجدول التالي:

الكمية المصروفة	G	F	E	D	المصب
A	20	-	10	10	40
B	-	10	0	15	25
C	10	10	-	-	20
الكمية المستقبلة	30	20	10	25	85

جدول 13-3

و يكون أعظم تدفق لهذه المسألة كما يلي:

- نرسل من الخزان A 40 ل/ثا عبر الأنابيب:
 - AD 10 ل/ثا
 - AE 10 ل/ثا
 - AG 20 ل/ثا
- نرسل من الخزان B 25 ل/ثا عبر الأنابيب:
 - BD 15 ل/ثا
 - BF 10 ل/ثا
- نرسل من الخزان C 20 ل/ثا عبر الأنابيب:
 - CF 10 ل/ثا
 - CG 10 ل/ثا

كما تستقبل القرية D 25 ل/ثا من الخزائين A; B.

و تستقبل القرية E 10 ل/ثا من الخزان E

و تستقبل القرية F 20 ل/ثا من الخزائين B و C

أما القرية G فنستقبل 30 ل/ثا من الخزائين A و C

و يلاحظ أن القرية D لم تلبى كل احتياجاتها إذ بقي عجز يقدر بـ 5

ل/ثا، كما أن الخزان A لا يشتغل بكامل طاقته.

و يكون هذا أعظم تدفق ممكن.

تمارين

تمرين 1: يقوم الديوان الوطني للحبوب بتأمين إحتياجات البلاد من مختلف الحبوب الأساسية، لهذا الديوان كميات مخزنة بموانئ بعض الدول الممونة، هذه الموانئ هي A, B, C, D إن الكميات المخزنة في كل ميناء بالآلاف الأطنان هي:

الميناء المصدر	A	B	C	D
الكمية المخزنة	140	120	120	120

يريد الديوان نقل هذه الكميات الى الموانئ الوطنية E, F, G, H قدرات إستقبال كل ميناء بالآلاف الأطنان هي:

الميناء الوجهة	E	F	G	H
قدرة الإستقبال	120	100	110	170

عدة بواخر يمكن رصدها لنقل هذه الكميات الى الموانئ الوطنية، إلا أن طاقة نقل البواخر من كل ميناء منبع الى كل ميناء مصب تختلف و هي بالآلاف الأطنان موضحة في الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	90	50	40	-
B	70	60	30	-
C	-	40	60	100
D	-	40	60	100

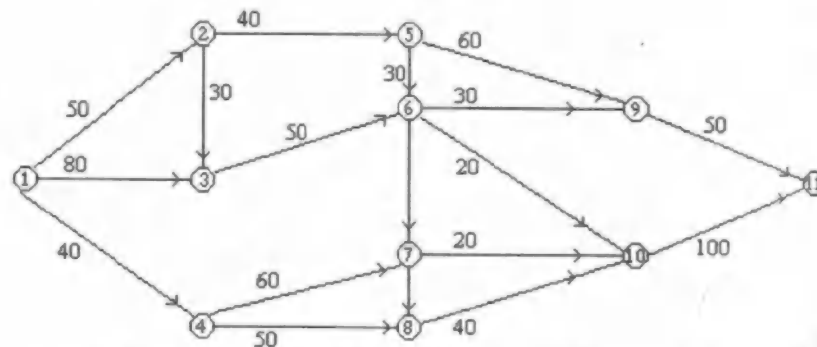
a_{ij} : الكمية التي يمكن أن تنقلها الباخرة من الميناء المصدر i الى الميناء المستقبل j.

المطلوب: حدد الكميات التي يجب أن تنقلها كل باخرة من كل ميناء مصدر الى كل ميناء مستقبل و التي من شأنها أن تعظم الكميات المنقولة الى مختلف موانئ الوطن.

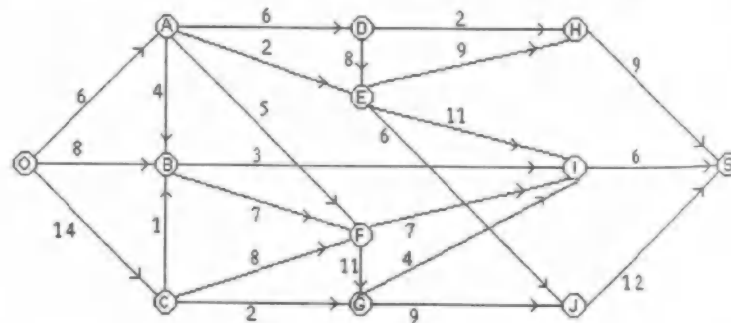
تمرين 2: أوجد أعظم تدفق بين الخزانات A, B, C والقرى W, X, Y, Z إذا علمت أن طاقة تصريف الأنابيب الرابطة بين الخزانات و القرى وطاقة تصريف كل خزان و طاقة استقبال كل قرية موضحة في الجدول التالي:

طاقة التصريف	Z	Y	X	W	القرية الخزان
100	-	10	30	20	A
120	30	50	70	10	B
80	70	30	-	-	C
	60	70	40	30	طاقة الإستقبال

تمرين 3: أوجد أعظم تدفق بين المدخل 1 و المخرج 11 للبيان التالي:



تمرين 4: حدد التدفق الأعظمي من المدخل O الى المخرج S للبيان التالي:



الفصل الرابع عشر
تحليل شبكات الأعمال
- طريقة المسار الحرج -
الطريقة الأمريكية

إن طريقة تحليل شبكات الأعمال تفيد في مساعدة المسير في تخطيط وجدولة العمليات المختلفة اللازمة لأداء عملية معينة بحيث يتم تنفيذها بأعلى كفاية ممكنة، وهي شائعة في برمجة إنجاز المشاريع الكبرى بحيث تسمح بالتحكم في وقت إنجاز مختلف أنشطة المشروع و بالتالي في وقت إنجازه، كما تسمح بالعمل على تخفيض تكاليفه.

من الأساليب الكثيرة الإستخدام في تحليل شبكات الأعمال أسلوبان هما:

- طريقة المسار الحرج CPM أي (Critical Path Method) أو الطريقة الأمريكية.
- طريقة تقييم البرامج و مراجعة التقنيات (PERT Program Evaluation and Review Technique)

و من الأشخاص البارزين في إيجاد الطريقة الأولى R. Morgan ، Walker ، James. Kelly، و كان ذلك خلال الفترة 1956/1957.

أما الطريقة الثانية فقد قام بتطويرها فريق تابع لدائرة المشاريع الخاصة في البحرية الأمريكية من أجل تحسين وسائل التحكم بتنفيذ برامج صواريخ بولاس التي يتم إطلاقها من تحت مياه المحيط بواسطة غواصات متحركة (سنة 1958).

و سوف نتطرق في ما يلي الى طريقة المسار الحرج، و في الفصل الموالي الى طريقة بيرت.

جاءت طريقة المسار الحرج لتلبي حاجة المشاريع الإنشائية كبناء السكن، بناء المصانع و تجهيزها، بناء الطرق و المطارات... الخ،

و مشاريع البحوث العلمية، الأعمال الإدارية... الخ، و هذا لتكون وسيلة فعالة بيد الإدارة، إذ أنها تمكننا من أن نسين الصورة الكاملة للمشروع بكل ما يشتمل عليه من أعمال جزئية وتسلسلها و اعتماد بعضها على بعض، بحيث تسمح لنا باتخاذ القرارات على ضوء تفهم جيد لتأثيرها على كامل المشروع.

و تتضمن طريقة المسار الحرج 3 مراحل رئيسية هي:

- إعداد خطة لإنجاز المشروع.
- إعداد البرنامج الزمني للمشروع من خلال البرنامج الزمني لكل نشاط فيه.
- مراقبة سير العمل و التحكم فيه.

أولاً: أهمية وفوائد طريقة المسار الحرج: أهم فوائد هذه الطريقة ما يلي:

- أنها تفترض إجراء تحليل تفصيلي لكامل المشروع مما يؤدي الى خطة عمل متحكم فيها.
- أنها تسمح بتوفير صورة واضحة عن تسلسل الأعمال الجزئية التي يتكون منها المشروع.
- أنها أفضل طريقة تسمح بتقدير المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع أو أي جزء منه و ذلك بمستوى دقة جيد.
- أنها تسمح بتحديد تواريخ بدء و نهاية كل نشاط في المشروع، كما تسمح بتحديد الأنشطة التي ينبغي تسريعها و الأنشطة التي يمكن تأخيرها بدون التأثير في مدة إنجاز المشروع، فهي تسمح بتسليط الضوء على الأنشطة التي تؤثر مباشرة على البرنامج و بالتالي

تسمح بإعطائها العناية اللازمة لتنفيذها في الأوقات اللازمة.

- أنها تشكل إطاراً و نظاماً لمراقبة سير العمل في تنفيذ المشروع و لإعداد التقارير الدورية عن سير العمل و البيانات و التحليلات.
- أنها تسهل إجراء ما يمكن من تعديلات عند الضرورة على خطة العمل مع الاحتفاظ بالسيطرة على مجرى العمل.
- أنها تشكل أساساً لتقييم مدى تأثير أي تأخر أو تعديل يطرأ أثناء تنفيذ المشروع على مدة إنجازه.
- أنها تشكل أساساً لوضع جدول اليد العاملة والمعدات و الآلات يتماشى مع مختلف مراحل إنجاز المشروع.
- أنها تمكننا من معرفة الأنشطة التي يمكن تسريعها لتسريع مدة إنجاز المشروع و ذلك بمبادلة الوقت بالمال.
- تمكننا من الضبط الجيد لتكلفة المشروع، كما تمكننا من تحديد مواعيد تزويد المشروع بمختلف مستلزمات إنجازه.
- أنها تمكننا من معرفة تفاصيل الأنشطة المختلفة للمشروع و بالتالي تقليل من احتمال نسيان أي نشاط.

ثانياً: تخطيط و جدولة شبكات الأعمال: لإعداد شبكة الأعمال لابد من المرور بثلاث مراحل أساسية وهي:

- تحديد جميع الأنشطة التي يتكون منها المشروع.

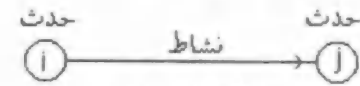
- تحديد التسلسل أو الترتيب المنطقي الذي يجب أن تنفذ الأنشطة طبقا له.

- رسم مخطط شبكي يبين الأنشطة حسب الترتيب الذي يتم التوصل إليه في المرحلة الثانية.

1- مفاهيم أساسية: إن إعداد شبكات الأعمال يتطلب الإلمام بمجموعة من المصطلحات الأساسية منها ما يلي:

أ- مفهوم الحدث: الحدث هو إنجاز معين يتم عند نقطة معينة ومعروفة من الزمن، وبعبارة أخرى يقصد بالحدث الوصول عند مرحلة معينة من تنفيذ المشروع، أي أنه عبارة عن واقعة مقرونة بعامل الزمن التي تحدد بداية أو نهاية زمن أي نشاط، ويعبر عنه بيانيا بدائرة تكتب في داخلها إشارة (رقم أو حرف) تمثل ترتيب الحدث في الشبكة.

وقد يكون الحدث فرديا حينما يكون نتيجة لنشاط واحد، وقد يكون مركبا حينما يكون نتيجة لعدة أنشطة.

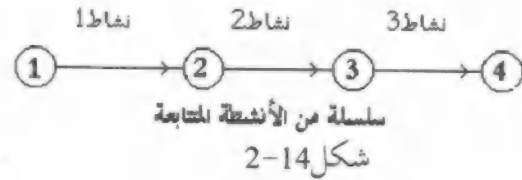


شكل 1-14

ب- مفهوم النشاط: هو العمل اللازم لإتمام حدث معين، أو هو أي جزء من المشروع يستغرق وقتا وله بداية ونهاية، ويتطلب تخصيص مورد من موارد المشروع المراد إنجازها، ويشير إليه بيانيا بسهم رأسه يمثل اتجاه سير النشاط، وحيث يكون النشاط فعليا، وقد يكون النشاط وهميا يستعان به في رسم الشبكة وهو لا يكلف وقتا ولا مالا ويمثل في الشبكة عن طريق خط متقطع، كما في الشكل 7-14.

و كل نشاط يوجد بين حدثين، الأول هو حدث البداية والثاني هو حدث النهاية (انظر الشكل 1-14).

ج- الأنشطة المتتالية: هي الأنشطة المتعاقبة وفق ترتيب معين، حيث لا يمكن إنجاز النشاط اللاحق إلا بعد الإنتهاء من النشاط السابق، و تقدم في الشبكة على النحو التالي:



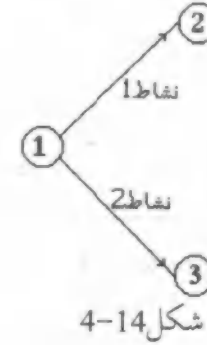
د- الأنشطة المتوازية: هي الأنشطة التي يمكن إنجازها في نفس الوقت، أي أن إنجاز أي منها لا يتوقف على الآخر، ويمكن أن يكون هناك نشاطين متوازيين، كما يمكن أن تكون هناك عدة أنشطة متوازية، عمليا يمكن أن تصادف نشاطين متوازيين مستقلين أو أنشطة كتوازية مشتركة في حدث البداية أو في حدث النهاية، و يظهر ذلك في الأمثلة التالية:

نشاطين متوازيين مستقلين

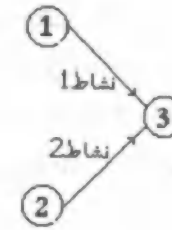


شكل 3-14

نشاطين متوازيين مشتركين في حدث البداية



نشاطين متوازيين مشتركين في حدث النهاية

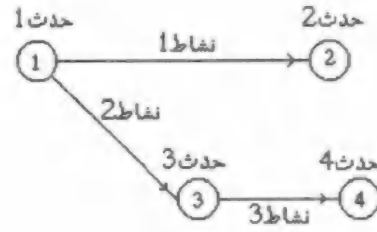


شكل 5-14

هـ - المشروع: عبارة عن إنجاز يتكون من مجموعة من الأنشطة المتتالية و المتداخلة يتم تنفيذها على أساس التسلسل الزمني لها و أولوية إبتدائها.

2- إعداد شبكة الأعمال: تعد شبكة الأعمال بمراعاة الخطوات التالية:

أ- يمثل كل نشاط بسهم واحد، و يقع كل من طرفي السهم (ذيله و رأسه) عند دائرة صغيرة تسمى حدثا كما يظهر ذلك في الشكل الموالي:



شكل 6-14

ب- من قواعد إعداد الشبكة أيضا أن كل سهم يجب أن يكون بين حدثين، و أنه يجب أن يكون للمشروع بدايئة واحدة، و أن مراعاة تتابع الأنشطة تستوجب أحيانا إضافة أسهم خيالية زمن تنفيذها معدوم.

مثال 1-14: نفترض أنه لدينا مشروعا يتكون من ثلاثة أنشطة هي: A, B, C و أنه يشترع في تنفيذ النشاط B بعد الإنتهاء من النشاطين A و C أي:

- النشاط A لا يسبقه شيئا.

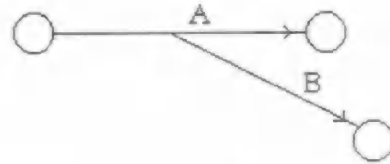
- النشاط C لا يسبقه شيئا.

- النشاط B يسبقه A و C.

إن رسم شبكة هذه الأنشطة يكون كما في الشكل التالي:

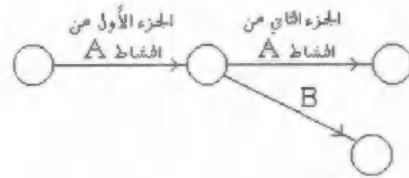
ج- من قواعد رسم شبكات الأعمال أيضا عدم البدء في أي نشاط قبل إنهاء النشاط السابق له فلا يجوز التقدم التالي:

تقدم خاطيء



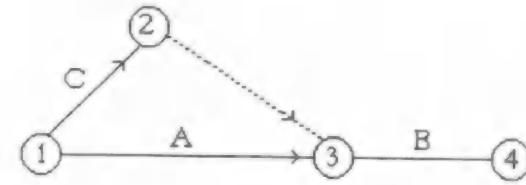
شكل 9-14

فرسم الشبكة بهذا الشكل خاطيء، وإذا كان لابد البدء بالنشاط B بعد إنجاز جزء من النشاط A و اخترنا أن ننفذ العمل بهذه الطريقة، فإنه علينا أن نقسم النشاط A الى نشاطين أي جزئين و نرسم الشبكة كما في الشكل التالي:



شكل 10-14

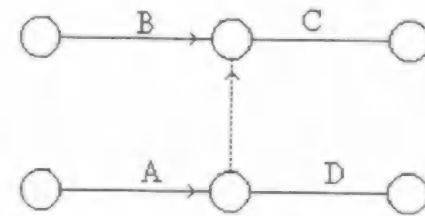
بحيث تعتبر أن الجزء الأول من النشاط A هو حدث مستقل و الجزء الثاني من النشاط A هو أيضا حدث مستقل.
د - لدى القيام برسم الشبكة ينبغي اتباع الترتيب المنطقي للأنشطة خطوة بخطوة، و علينا أن نطرح الأسئلة التالية عند كل نشاط:



شكل 7-14

يلاحظ أنه أحدث نشاط خيالي رمز له بسهم متقطع و هو عبارة عن نشاط افتراضي، ليبدل على أن النشاطين A و C، كليهما سابقين للنشاط B و يكون زمن تنفيذ هذا النشاط صفراً.

مثال 2-14: إذا كان النشاطان A و B يسبقان النشاط C و النشاط D مسبقاً بالنشاط A، فإن تمثيل هذه الأنشطة على شبكة الأعمال يتم كما يلي:



شكل 8-14

يظهر البيان أن النشاط C مسبقاً بالنشاطين B و A و النشاط D يسبقه النشاط A.
و إذا كان النشاطان A و B غير مسبقين بأي نشاط، فإنهما يشتركان في حدث البداية.

- ما هي الأنشطة التي يجب إنهاؤها قبل أن يصبح بالإمكان البدء بهذا النشاط؟

- ما هي الأنشطة التي يمكن تنفيذها في أثناء تنفيذ هذا النشاط؟

- ما هي الأنشطة التي يتوقف البدء بها على إنهاء هذا النشاط؟

هـ - تحدد مدة إنجاز كل نشاط باليوم أو أجزاءه، الشهر، أضعافه أو أجزاءه.

و - قبل الشروع في رسم الشبكة يجب التمييز جيدا بين مختلف الأنشطة و تحديدها تحديدا جيدا، مع مراعاة ما يلي:

- الفصل بين الأنشطة التي تعود مسؤولية إنجازها الى جهات مختلفة، فالأعمال التي تقوم بها مؤسسة ما تفصل عن الأعمال التي تقوم بها مؤسسة أخرى.

- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج الى اختصاصات متميزة حرفية أو فنية أو غيرها.

- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج معدات متميزة، فالأنشطة التي تحتاج مثلا للآلة أ تفصل عن الأنشطة التي تحتاج الى الآلة ب.

- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج مواد مختلفة، فالأنشطة التي تستعمل فيها الخرسانة مثلا تفصل عن الأنشطة التي تستخدم فيها الهياكل الحديدية.

- الفصل بين الأجزاء الإنشائية المختلفة، كالجدران، الأسقف، التليس... الخ.

- الفصل بين الأنشطة التي تنفذ في أماكن مختلفة من المشروع في أوقات مختلفة أو بواسطة فرق عمل مختلفة أو مؤسسات مختلفة.

ثالثا: تحديد المسار الحرج: كما سبقت الإشارة فإن شبكة الأعمال تتكون من مجموعة كبيرة من الأنشطة المتتالية و المتوازية و المتداخلة، و التي يتم التعبير عنها بأسمهم مرسومة حسب قواعد إعداد الشبكة، بحيث كل نشاط يتطلب وقتا معيناً لتنفيذه يكتب فوق السهم أو أسفله، أي أن جميع الأسهم تكون مقيمة باستثناء الأسهم التي تمثل الأنشطة الخيالية التي يتم الاستعانة بها حيث يكون زمن تنفيذها معدوما.

إن تتابع هذه الأسهم يشكل لنا مساراً من أول حدث في المشروع الى آخر حدث، و أطوال هذه المسارات تختلف، غير أن المسار الذي يستغرق أطول وقت زمني ممكن من بين جميع مسارات شبكة الأعمال هو الذي يشكل لنا المسار الحرج، أي أن مجموع أوقات هذا المسار هي التي تحدد لنا الوقت اللازم للإنتهاء من المشروع، بحيث أن التأخير في إنجاز أي نشاط من الأنشطة الواقعة على المسار الحرج يؤدي الى تأخير وقت الإنتهاء من المشروع، فكل النشاطات التي تقع على هذا المسار هي نشاطات حرجية ينبغي الحرص على تنفيذها في مواعيدها، أما بقية الأنشطة فهي غير حرجية، و لتحديد المسار الحرج يتم حساب عددا من الأوقات يعتمد عليها في التسيير الزمني لكامل المشروع.

و تستخدم في شبكات الأعمال العادية ستة أوقات هي:

- الوقت المبكر لبداية النشاط.
- الوقت المبكر لنهاية النشاط.
- الوقت المتأخر لبداية النشاط.
- الوقت المتأخر لنهاية النشاط.
- وقت السماح الكلي.
- وقت السماح الحر.

تحتسب هذه الأوقات على ثلاث مراحل:

المرحلة الأولى: تتم على الشبكة و نسميها مرحلة الذهاب، و يحسب فيها الوقت المبكر لبداية كل النشاط. والوقت المبكر لبداية النشاط هو أبكر وقت ممكن للبدء بالنشاط عند أخذ الوقت اللازم للأنشطة التي تسبقه بعين الاعتبار.

الوقت المبكر لبداية النشاط = الوقت المبكر لبداية النشاط السابق له + مدة إنجاز النشاط السابق

و يكون الوقت المبكر لبداية أول نشاط صفرا.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: عندما يكون النشاط مسبقا بنشاطين أو أكثر فإن بدايته المبكرة يحكمها النشاط السابق له ذو أكبر نهاية مبكرة، علما أن:

الوقت المبكر لبداية النشاط = الوقت المبكر لنهاية النشاط السابق له.

المرحلة الثانية: تتم على الشبكة أيضا و نسميها مرحلة الإياب، و يحسب فيها الوقت المتأخر لنهاية النشاط، و هو آخر وقت ممكن لإنهاء النشاط، بحيث يظل بالإمكان إنهاء المشروع بكامله في التاريخ المحدد.

إن الوقت الذي ينتهي فيه المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية آخر الأنشطة زائدا مدة تنفيذ هذه الأنشطة، ونسميه أبكر وقت لإنهاء المشروع. و يكون:

الوقت المبكر لنهاية المشروع = الوقت المتأخر لنهاية المشروع أو الوقت المتأخر لتنفيذ آخر الأنشطة.

أي في آخر قمة يكون لنا:

الوقت المبكر لبداية = الوقت المتأخر لنهاية

تدون هذه الأوقات في آخر حدث من المشروع كما يلي:



شكل 11-14

في بقية القمم يكون لنا:

الوقت المتأخر لنهاية النشاط = الوقت المتأخر لنهاية النشاط اللاحق - مدة تنفيذ النشاط اللاحق.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: عندما يكون النشاط مسبقا بنشاطين أو أكثر فإن نهايته المتأخرة تحكمها أبكر بدايات متأخرة بين الأنشطة التي تتبعه.

المرحلة الثالثة: مرحلة تدوين الأوقات الهامشية الأخرى في جدول نسميه جدول الأوقات الهامشية، أو جدول المراقبة الزمنية للمشروع، و هو يحتوي على المعلومات التالية:

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	دليل النشاط	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		وقت السماح		النشاط الحرج
				لبداية	لنهاية	لبداية	لنهاية	الكللي	اخر	

جدول 1-14

في الجدول نضع الأوقات التي حسبت على الشبكة و هي
الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية، أما بقية
الأوقات التي لم تحسب على الشبكة فتحسب كما يلي:
الوقت المبكر لنهاية النشاط: هو أبكر وقت ممكن لإنهاء
النشاط، يحسب كما يلي:

الوقت المبكر لنهاية النشاط = الوقت المبكر لبداية النشاط + مدة تنفيذ
هذا النشاط.

الوقت المتأخر لبداية النشاط: هو آخر وقت يمكن بدأ
النشاط فيه دون أن يؤدي ذلك الى تأخير نهاية المشروع،
ويحسب كما يلي:

الوقت المتأخر للبداية = الوقت المتأخر للنهاية - مدة تنفيذ النشاط.

وقت السماح الحلي: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت
نهايته المبكرة الممكن بدون التسبب في إطالة مدة تنفيذ
المشروع، أي أنه عبارة عن مقدار الوقت الذي يمكن للنشاط
أن يستهلكه زيادة على المدة المقدرة التي يحتاجها النشاط دون
أن يتسبب ذلك في إطالة مدة المشروع، و يحسب كما يلي:

السماح الكلي = البداية المتأخرة - البداية المبكرة

أو:

السماح الكلي = النهاية المتأخرة - النهاية المبكرة

السماح الحر: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت نهايته
المبكرة بدون التسبب بتأخير البداية المبكرة لأي نشاط آخر،
وبعبارة أخرى هو مقدار الوقت المتاح للنشاط زيادة على المدة
المقدرة التي يحتاجها، أي الوقت الذي يمكن للنشاط أن
يستهلكه دون التأثير على إمكانية بدء أي نشاط لاحق في وقت
بدايته المبكرة، و يحسب كما يلي:

السماح الحر = البداية المبكرة لأبكر نشاط لاحق - النهاية المبكرة للنشاط

المرحلة الرابعة: تحديد المسار الحرج: المسار الحرج هو
سلسلة الأنشطة التي يساوي السماح الكلي لكل منها صفراً،
وذلك من بداية المشروع الى نهايته، و هو الذي يحدد مدة إنجاز
المشروع، و قد يكون للمشروع أكثر من مسار حرج.
و ما يجب أن نلفت إليه الانتباه هو أنه إذا حصل تأخير في تنفيذ
أي نشاط حرج، فإن ذلك يؤدي الى تأخير إنهاء المشروع
بنفس المقدار، لذا فإنه من المهم تحديد الأنشطة الحرجة نظراً
لأنها تحتاج أثناء تنفيذ المشروع الى مراقبة دقيقة لضمان التقيد
بالبرنامج.

و تحدد الأنشطة الحرجة على الشبكة و نميزها عن غيرها بمسار
مزدوج الخطوط، و تقع هذه الأنشطة بين القمم التي تكون
فيها الأوقات المبكرة للبداية مساوية للأوقات المتأخرة للنهاية.

مثال 3-14: الجدول التالي يظهر مجموعة الأنشطة التي يتكون منها مشروع بناء مسكن وكذا أوقات تنفيذ كل نشاط والأنشطة السابقة لكل نشاط بالأيام.

إسم النشاط	رمز النشاط	الأنشطة السابقة	الوقت اللازم لتنفيذ النشاط
تسوية الأرضية	A	-	6
بناء القواعد	B	A	20
بناء الجدران	C	B	12
شراء الحديد	D	-	20
تهيئة الحديد	E	D	24
شراء الأسمنت	F	-	6
وضع الأسقف	G	F	20
طلاء المبنى	H	G	4

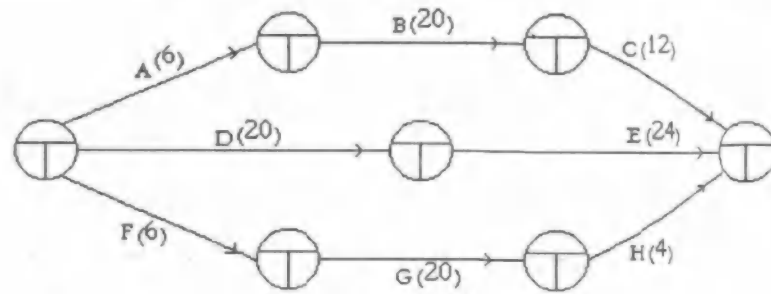
جدول 2-14

المطلوب:

- 1- ارسم شبكة الأعمال.
- 2- احسب الأوقات المبكرة للبداية و للنهاية
- 3- احسب الأوقات المتأخرة للبداية و للنهاية.
- 4- حدد الأنشطة الحرجة.
- 5- ما هي مدة تنفيذ المشروع.

1- رسم شبكة الأعمال:

حسب مبدأ رسم الشبكة فإن بداية المشروع تكون واحدة ونهايته تكون واحدة، لذلك تم الانطلاق من قمة واحدة (حدث البداية) و تم الانتهاء عند قمة واحدة (حدث النهاية). و يلاحظ في الرسم أننا راعينا الأنشطة السابقة لكل نشاط. كما وضع زمن تنفيذ كل نشاط بين قوسين أمام إسم النشاط إما أعلى السهم الذي يمثل النشاط أو أسفله.



شكل 12-14

يظهر من الرسم الشبكي أننا حرصنا على تتابع الأنشطة كما هي في الجدول أعلاه.

2- حساب الأوقات:

- **الأوقات المبكرة لبداية كل نشاط:** الوقت المبكر لبداية كل نشاط هو أبكر وقت ممكن نستطيع أن نبدأ فيه النشاط، وهو عبارة عن الوقت المبكر لبداية النشاط السابق زائدا مدة تنفيذ النشاط، مع العلم أن الوقت المبكر للأنشطة غير المسبوقة وهي A, D, F تساوي صفراً، ويتم حساب هذه الأوقات على الشبكة كما يلي:

الوقت المبكر لبداية كل نشاط

النشاط	الوقت المبكر لبداية
A	0 =
B	6 = 0 + 6
C	26 = 20 + 6
D	0 =
E	20 = 20 + 0
F	0 =
G	6 = 0 + 6
H	26 = 20 + 6

جدول 3-14

تدون هذه الأرقام في الجزء الأيسر من القمة التي تمثل الحدث على الشبكة (انظر الشكل 13-14).

ملاحظة: الوقت المبكر لبداية النشاط المفترض أن يلي الأنشطة H, E, C هو الأكبر بين:

$$44 = (30 = 4 + 26, 44 = 24 + 20, 38 = 12 + 26)$$

و هذه المدة تعبر في نفس الوقت عن آخر وقت لإنجاز هذه الأنشطة و عن وقت نهاية المشروع.

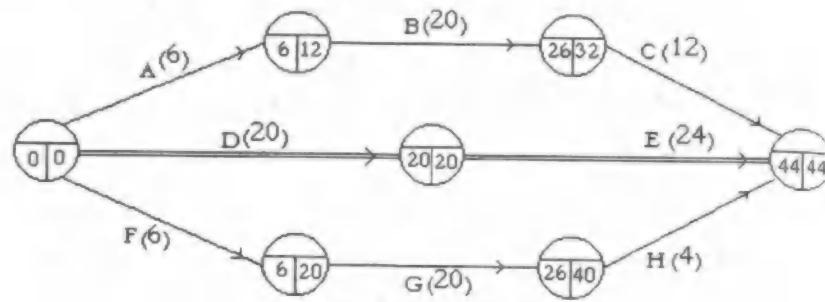
3- الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط: هو آخر وقت ينبغي أن ننهي فيه النشاط، و تحسب أيضا على الشبكة في مرحلة الإياب، بحيث نراعي أن الوقت الذي ينتهي فيه المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية آخر نشاط زائدا مدة تنفيذ هذا النشاط، و حيث يكون في آخر قمة الوقت المبكر للبداية مساويا الى الوقت المتأخر للنهاية.

الوقت المتأخر لنهاية كل نشاط

النشاط	الأوقات المتأخرة
C	الوقت المتأخر لنهايته 44-
B	الوقت المتأخر لنهايته 32- 12-44-
A	الوقت المتأخر لنهايته 12- 20-32-
E	الوقت المتأخر لنهايته 44-
D	الوقت المتأخر لنهايته 20- 24-44-
H	الوقت المتأخر لنهايته 44-
G	الوقت المتأخر لنهايته 40- 4-44-
F	الوقت المتأخر لنهايته 20- 20-40-

جدول 14-4

تدون هذه الأوقات في الجزء الأيمن من القمة التي تمثل الحدث. و نحصل على الشبكة التالية حيث تظهر الأوقات المبكرة لكل نشاط و الأوقات المتأخرة لكل نشاط.



شكل 13-14

و يلاحظ أن الوقت اللازم لإنجاز المشروع هو 44 يوم، كما يظهر عند آخر حدث في المشروع.

4- تحديد الأوقات في الجدول: في جدول المراقبة الزمنية للمشروع ندون الأوقات المبكرة لبداية كل نشاط و الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط و المحصل عليها انطلاقا من الحسابات الجارية على الشبكة، و بناء عليها يتم حساب الأوقات المبكرة لنهاية كل نشاط و الأوقات المتأخرة لبداية كل نشاط إضافة الى وقت السماح الكلي، كما تم تعريف ذلك سابقا، و عليه فإن جدول المراقبة الزمنية للمشروع يكون على النحو التالي:

جدول المراقبة الزمنية للمشروع

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة للبداية	الأوقات المتأخرة للنهاية	السماح الكلي	النشاط الحرج
A	-	6	0	6	6	-
B	A	20	6	26	32	-
C	B	12	26	38	44	-
D	-	20	0	20	20	حرج
E	D	24	20	44	44	حرج
F	-	6	0	6	14	-
G	F	20	6	26	40	-
H	G	4	26	30	44	-

جدول 14-5

يلاحظ أن الجدول يحتوي على جميع الأوقات التي تسمح بمراقبة تنفيذ المشروع، كما يظهر النشاطين الحرجين الذين على أساسهما تحدد مدة تنفيذ المشروع بكامله، وهما النشاطين D, E اللذان يتطلبان عناية خاصة وصرامة في إحترام وقت تنفيذهما، إذ أن أي تأخر في تنفيذهما سوف يؤدي إلى إطالة مدة تنفيذ المشروع بقدر ذلك التأخر، وعلى سبيل المثال لو تأخر إنجاز النشاط E بيوم واحد لأدى ذلك إلى تأخر مدة تنفيذ المشروع بيوم واحد ليستلم بعد 45 يوم بدل 44 يوم.

مثال 4-14: الجدول التالي يظهر 13 نشاطا رئيسيا لإنجاز مشروع ما، وكذلك المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأيام.

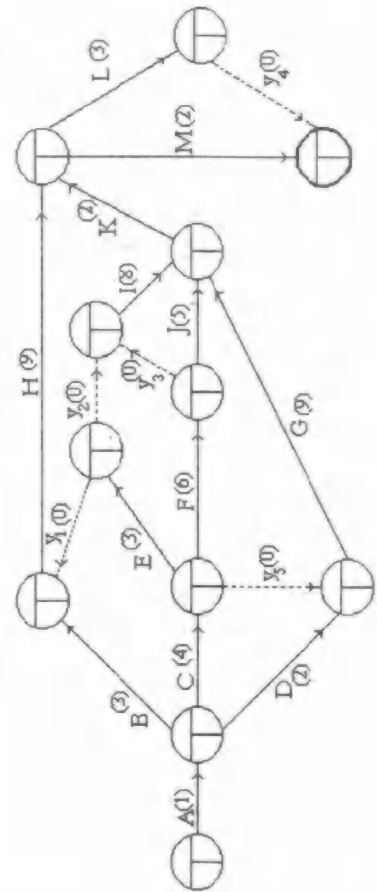
اسم النشاط	الأنشطة السابقة	المدة اللازمة لتنفيذ النشاط
A	-	1
B	A	3
C	A	4
D	A	2
E	C	3
F	C	6
G	C, D	9
H	B, E	9
I	E, F	8
J	F	5
K	I, J, G	2
L	H, K	3
M	H, K	2

جدول 6-14

المطلوب:

- رسم شبكة الأعمال.
- حساب الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة، و الأوقات المتأخرة لنهاية الأنشطة على الشبكة.
- إيجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع.
- تحديد الأنشطة الحرجة وتحديد مدة إنجاز المشروع.

1- رسم الشبكة: نقوم برسم الشبكة بنفس المبادئ التي تم التطرق إليها، مع الانتباه إلى ضرورة إضافة بعض الأنشطة الخيالية مراعاة لترتيب الأنشطة، حيث تكون مدة تنفيذها معدومة، و عليه تكون الشبكة كما يلي:

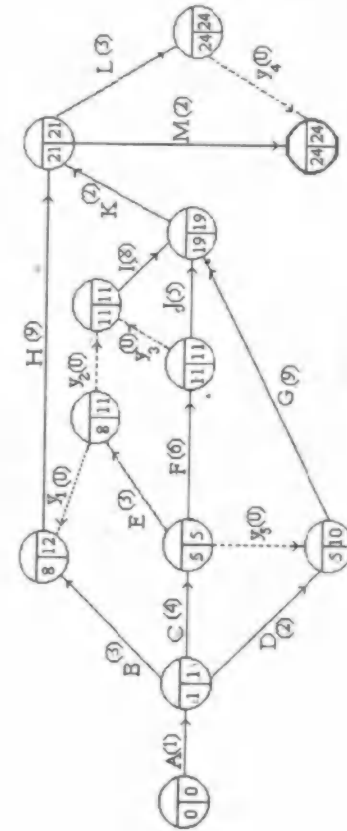


شكل 14-14

2- حساب الأوقات:

مرحلة الحساب: ونحسب فيها الوقت المبكر لبداية كل نشاط، بحيث نضع:

- الوقت المبكر لبداية أول نشاط يساوي صفر.
- الوقت المبكر للنشاط الموالي = الوقت المبكر للنشاط السابق + مدة تنفيذ النشاط.



شكل 14-15

و عليه فإن الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة الموضوعة في الجانب الأيسر من القمة تم حسابها كما يلي:

النشاط	الأوقات المبكرة للبداية
النشاط A	الوقت المبكر لبدايته = 0
النشاط B	الوقت المبكر لبدايته = 1-1+0=
النشاط C	الوقت المبكر لبدايته = 1-1+0=
النشاط D	الوقت المبكر لبدايته = 1-1+0=
النشاط E	الوقت المبكر لبدايته = 5-4+1=
النشاط F	الوقت المبكر لبدايته = 5-4+1=
النشاط الحياي y _s	الوقت المبكر لبدايته = 5-4+1=
النشاط G	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين [3-2+1 و 5-0+5] = 5
النشاط H	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين: [3-3+1 و 8-0+8] = 8
النشاط I	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين: [8-0+8 و 11-0+11] = 11
النشاط J	الوقت المبكر لبدايته = 11-6+5 =
النشاط K	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين: [19=8+11 و 16=5+11] = 19
النشاط L	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين: [21=17+8 و 21=2+19] = 21
النشاط M	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين: [21=17+8 و 21=2+19] = 21
النشاط الحياي y ₄	الوقت المبكر لبدايته = 24=3+21 و منه فإن الوقت المبكر لنهاية المشروع هو 24

جدول 14-7

لاحظ أنه بالنسبة للأوقات المبكرة لبداية الأنشطة G,H,I,K,L,M أننا أخذنا أكبر وقت محسوب بين الأوقات المبكرة للأنشطة السابقة مضافا إليها مدة تنفيذ هذه الأنشطة ودونها في الشق الأيمن من خانة كل حدث كما يظهر ذلك في الشبكة (شكل 14-15).

المرحلة الثانية: مرحلة الإياب: نحسب فيها الأوقات المتأخرة لنهاية الأنشطة.

في آخر قمة نضع الوقت المتأخر لتنفيذ آخر الأنشطة يساوي الى مدة تنفيذ المشروع ويساوي 24 يوم في مثالنا. و منه فإن الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط يظهرها الجدول التالي، و تم حسابها تماما كما تم التطرق الى ذلك من قبل، دون إهمال الأنشطة الخيالية المساعدة التي اعتبرنا زمن تنفيذها معدوم.

الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط

النشاط	الأوقات المتأخرة لنهاية
النشاط M	الوقت المتأخر لنهايته = 24
النشاط L	الوقت المتأخر لنهايته = 24-0=24
النشاط K و H	الوقت المتأخر لنهايتهما هو أقل قيمة بين : [24-3=21 و 24-24=0] 21=22=2
النشاط I, J, G	الوقت المتأخر لنهايتهما = 21-2=19
النشاط F	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين : [19-5=14 و 11-0=11] 11=11
النشاط E	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين : [11-0=11 و 12-0=12] 11=11
النشاط D	الوقت المتأخر لنهايته = 19-9=10
النشاط C	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين : [11-6=5 و 8-3=5 و 10-10=0] 5=10=0
النشاط B	الوقت المتأخر لنهايته = 21-9=12
النشاط A	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين : [8-3=5 و 5-4=1 و 10-2=8] 1=8

جدول 6-8

المرحلة الثالثة: إيجاد جدول الأوقات الهامشية و حساب وقت السماح الكلي، و يتم ذلك وفق القواعد أعلاه. حيث يظهر الجدول التالي كامل الأوقات بما فيها الأوقات المحسوبة على الشبكة مباشرة، كما تتحدد عليه الأنشطة الحرجة.

جدول المراقبة الزمنية للمشروع

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		السماح الكلي	النشاط الحرج
			للبدء	للتناهي	للبدء	للتناهي		
A	-	1	0	1	0	1	0	حرج
B	A	3	1	4	9	12	8	
C	A	4	1	5	1	5	0	حرج
D	A	2	1	3	8	10	7	
E	C	3	5	8	8	11	3	
F	C	6	5	11	5	11	0	حرج
G	C, D	9	5	14	10	19	5	
H	B, E	9	8	17	12	21	4	
I	E, F	8	11	19	11	19	0	حرج
J	F	5	11	16	14	19	3	
K	I, J, G	2	19	21	19	21	0	حرج
L	H, K	3	21	24	21	24	0	حرج
M	H, K	2	21	23	22	24	1	

جدول 9-14

يظهر في الجدول الأنشطة الحرجة التي تتوقف عليها مدة تنفيذ المشروع وهي A, C, F, I, K, L وأي تأخر في أحدها سوف يؤدي الى تأخر مدة تنفيذ المشروع عن 24، حيث:

النشاط A	مدة تنفيذه هي:	1 يوم
النشاط C	مدة تنفيذه هي:	4 أيام
النشاط F	مدة تنفيذه هي:	6 أيام
النشاط I	مدة تنفيذه هي:	8 أيام
النشاط K	مدة تنفيذه هي:	2 يوم
النشاط L	مدة تنفيذه هي:	3 أيام

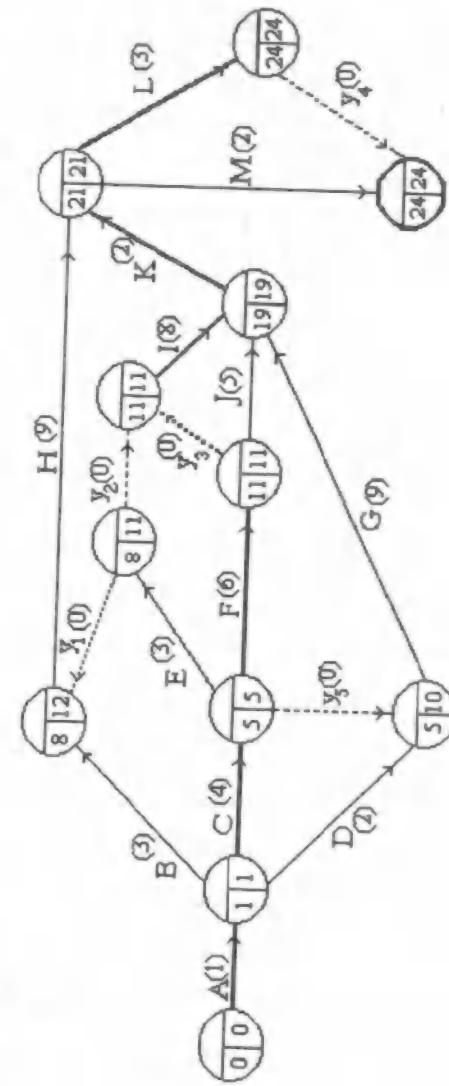
المجموع: 24 يوم

وهي الأنشطة التي ينبغي إعطاؤها عناية خاصة و تركيز الاهتمام عليها لتنفيذها في آجالها المحددة تماما، و تظهر بخطوط ثخينة على الشبكة أدناه:

رابعاً: تسريع المشاريع: في كثير من الأحيان و نتيجة للضغوطات المختلفة، تلجأ إدارة المشاريع الى تسريع مدة إنجاز المشروع، بأن تعمل في دورتين أو ثلاث دورات أو أربع دورات يومياً، لكي تخفض من المدة الاعتيادية لإنجاز المشروع، و هي بذلك تبادل الوقت بالتكاليف، و هذا ما سنحاول التطرق إليه في هذا البند.

1- جدول الموارد: إن تنفيذ كل نشاط يتطلب مجموعة من الموارد ينبغي تصغيرها لإنجازه في الوقت المحدد، و قد تكون هذه الموارد موارد بشرية أو موارد مالية، أو مادية في شكل آلات و معدات و مواد مختلفة تدخل في تنفيذ النشاط، وأنشطة المشروع في الغالب لا تتطلب نفس الموارد و بنفس القدر، فإذا تكلمنا عن الموارد البشرية فإن بعض الأنشطة يتطلب أربعة عمال، و الآخر عشرة عمال على الرغم من أنه مطلوب تنفيذهما في نفس الوقت، و لا شك أن حصر الموارد التي تسمح بتنفيذ المشروع أمر في غاية الأهمية، بحيث أنه يسمح للمسير أن يسيطر على تكاليف الإنجاز، خاصة إذا ما تعلق الأمر بالموارد البشرية، فليس من الإقتصاد في شيء إحضار عدد من العمال لموقع العمل و تركهم في راحة لأن النشاط المكلفين به تم إنجازه أو لم يحن الإنطلاق فيه بعد، و ليس من المعقول طلب مواد قابلة للتلف بوقت طويل قبل الشروع في تنفيذ النشاط، إذ يتطلب الأمر إعداد برنامج كامل خاص بالموارد المختلفة يتضمن تواريخ الطلب و تواريخ الاستعمال المتطابقة مع تواريخ بداية الأنشطة.

2- مباحلة الوقت بالتكاليف: في ظروف معينة يتطلب الأمر تسريع إنجاز المشروع أي تخفيض المدة الاعتيادية لإنجازه المحسوبة على أساس طريقة المسار الحرج كما تم شرحها،



شكل 14-16

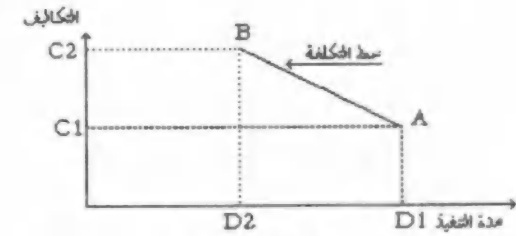
ويكون ذلك ممكنا إذا ما رصدت إمكانيات إضافية تسمح بتقليص الوقت الاعتيادي للأنشطة، فيتم العمل مثلا بنظام المداومة، مداومتين بثمان ساعات في كل واحدة، أو ثلاث مداومات أو أربع أي العمل بنظام أربع وعشرون ساعة على أربع وعشرون ساعة، ولا شك أن ذلك يتطلب مضاعفة التكاليف، ووسائل و مواد الإنجاز، مقابل تقليص مدة الإنجاز، وهذا ما يتم العمل به في الكثير من الإنشاءات المعمارية، ويصطلح على ذلك مبادلة الوقت بالتكاليف.

و بناء على هذا فإنه يمكن الكلام على:

- زمن عادي مقابل تكلفة عادية.

- زمن متسرع مقابل تكلفة متسعة.

وتكون العلاقة بين الزمن و التكلفة علاقة خطية عكسية ميلها سالب كما يظهر من الشكل الموالي:



شكل 14-17

باعتبار التكلفة دالة في زمن التنفيذ، فلاحظ أنه عند التكلفة C_1 كانت مدة تنفيذ النشاط هي D_1 أي النقطة A و عندما بادلنا الوقت بالتكلفة، أي أضفنا التكلفة لتصبح C_2 فإن مدة تنفيذ النشاط إنخفضت لتصل إلى D_2 و حصلنا على النقطة B، وتظهر بالتالي العلاقة الخطية العكسية بين التكلفة و زمن.

التنفيذ، ميل هذه العلاقة يظهر لنا نسبة أثر تخفيض وحدة زمنية واحدة على التكلفة، أي:

$$\frac{C_1 - C_2}{D_1 - D_2}$$

و يعني هذا أن ميل خط التكلفة عبارة عن نسبة الفرق بين التكلفة المتسعة و التكلفة العادية و الفرق بين الزمن المتسرع والزمن العادي.

$$\text{ميل خط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الزمن المتسرع} - \text{الزمن العادي}}$$

و يعكس ميل خط التكلفة الزيادة المتوقعة في التكلفة الإجمالية إذا ما قمنا بتخفيض مدة الإنجاز بوحدة زمنية واحدة لذلك يأخذ إشارة سالبة.

فهو يعبر عن العلاقة بين الوقت و التكلفة لأي نشاط إذا ما أريد مبادلة الوقت بالتكاليف.

و مبادلة الوقت بالتكاليف لا بد أن يرعى فيه بأن تكون زيادة التكاليف في أدنى المستويات، و لأجل ذلك يتم تخفيض مدة الأنشطة المرحلة التي يكون فيها هذا الميل أقل ما يمكن، حيث يخفض وقت تنفيذ النشاط حينئذ بوقت التخفيض المتاح لذلك النشاط، و يعاد من جديد حساب الأوقات، و تحديد المدة الجديدة لتنفيذ النشاط، حيث نحصل على مسار حرج جديد و تكلفة جديدة أكبر من التكلفة العادية، و يمكن تلخيص خطوات التسريع كما يلي:

1- إيجاد جدول المراقبة الزمنية العادية، و تحديد زمن تنفيذ المشروع و تكلفته الإجمالية.

2- حساب التكلفة المترتبة عن تخفيض مدة كل نشاط.

3- تخفيض مدة تنفيذ المشروع بتخفيض أكبر قدر من مدة تنفيذ أحد الأنشطة الحرجة التي يكون فيها ميل خط علاقة الوقت بالتكلفة أقل ما يمكن، و نقوم بنفس الشيء إذا كان هناك أكثر من مسار حرج.

4- نختار فيما إذا كانت مدة تنفيذ المشروع الجديدة لا يمكن تخفيضها لاستيفاء كل الوقت المتاح لتنفيذ الأنشطة الحرجة.

5- نحدد المسار الحرج الجديد باستخدام الأوقات الجديدة للأنشطة المترتبة عن التخفيض الذي تم في الخطوة 3، ثم نعود الى الخطوة 3.

مثال 14-5: الجدول التالي يظهر الأنشطة الأساسية لإنجاز أحد المشاريع الإنشائية، و المدة و التكلفة العادية لتنفيذ كل نشاط، كما يظهر المدة و التكلفة المتسرعين لكل نشاط. المدة بالأشهر. التكاليف بآلاف الدينارات.

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسعة	التكلفة المتسعة
A	-	7	30	4	45
B	-	5	10	3	16
C	-	4	20	4	20
D	A	6	18	5	25
E	C	7	40	5	50
F	B, E	8	25	6	35
G	C	4	30	4	30
H	B, E	6	15	6	20
I	D, F	5	18	3	20
J	H, G	6	24	4	30

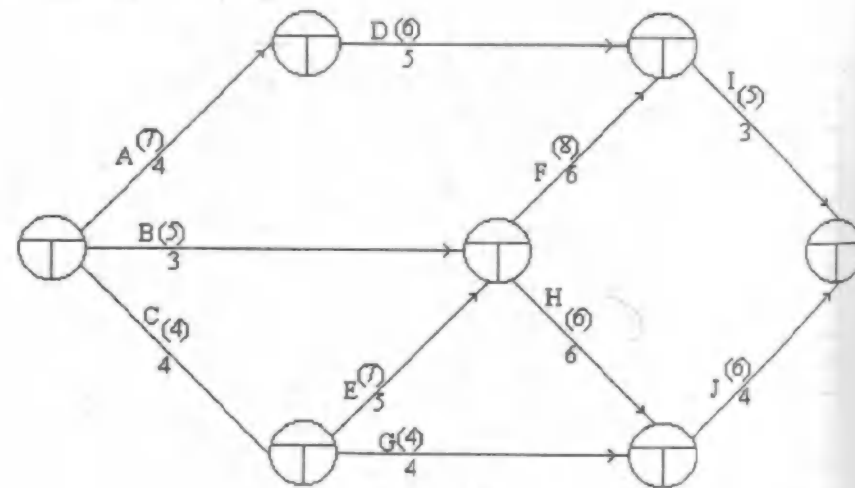
جدول 10-14

المطلوب:

- 1- رسم شبكة الأعمال
- 2- إيجاد جدول الأوقات
- 3- تحديد مدة تنفيذ المشروع العادية و تكلفة إنجازه مع تحديد المسار الحرج.
- 4- إيجاد جدول الأوقات المتسعة و تحديد مدة و تكلفة التنفيذ المتسعة.

الإجابات:

- 1- رسم الشبكة: باستخدام قواعد الرسم كما تم تقديمها في أحد البنود السابقة نحصل على شبكة الأعمال التالية:



شكل 14-18

يظهر في الشبكة وقتين، الوقت العادي موضوع بين القوسين أعلى السهم، بينما الوقت المتسرع موضوع أسفل السهم الذي يمثل النشاط.

- 2- حساب الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية، و يتم ذلك على الشبكة و هي كما يلي:

4- تسريع المشروع: بتفحص جميع مسارات الشبكة وحصر زمن التنفيذ العادي و زمن التنفيذ المتسرع بنجد:

جدول أزمدة المسارات

المسار	زمن التنفيذ العادي	زمن التنفيذ المتسرع
A,D,I	18	12
B,F,I	18	12
B,H,J	17	13
C,E,F,I	24	18
C,E,H,J	23	19
C,G,J	14	12

جدول 12-14

يفيدنا هذا الجدول في تحديد المدة القصوى لتخفيض النشاط الذي نريد تسريعه.

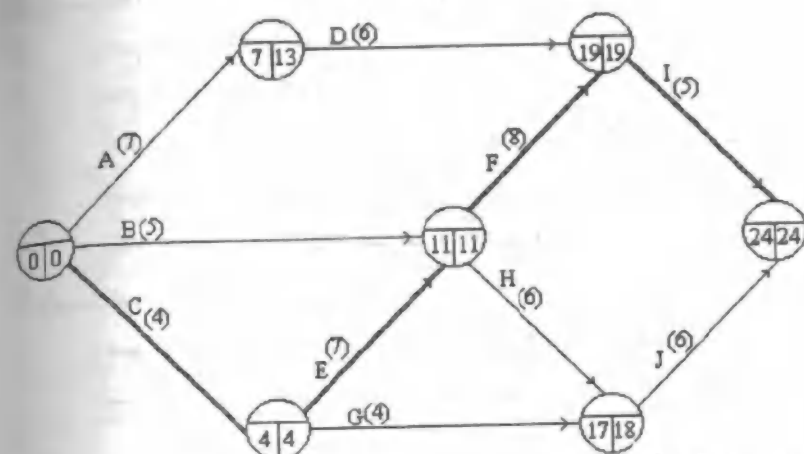
نقوم بعد هذا بحساب ميل التكلفة لكل نشاط، و تظهر في الجدول الموالي:

اسم النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسعة	التكلفة المتسعة	ميل التكلفة
A	7	30	4	45	5-
B	5	10	3	16	-
C	4	20	4	20	0
D	6	18	5	25	7-
E	7	40	5	50	5-
F	8	25	6	35	5-
G	4	30	4	30	0
H	6	15	6	15	0
I	5	18	3	20	1-
J	6	24	4	30	3-

جدول 13-14

بأخذ المسار الحرج و هو: C, E, F, I حيث نحدد ميل التكلفة لكل نشاط منه ملخصا في الجدول أدناه:

شكل 14-19



3- إيجاد جدول الأوقات:

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		السماح	طبيعة النشاط	التكلفة العادية
			للبدء	للنهاية	للبدء	للنهاية			
A	-	7	0	7	6	13	6		30
B	-	5	0	5	6	11	6		10
C	-	4	0	4	0	4	0	حرج	20
D	A	6	7	13	13	19	6		18
E	C	7	4	11	11	4	0	حرج	40
F	B, E	8	11	19	19	11	0	حرج	25
G	C	4	4	8	14	18	10		30
H	B, E	6	11	17	12	18	1		15
I	D, F	5	19	24	19	24	0	حرج	18
J	H, G	6	17	23	18	24	1		24
مجموع التكاليف									230

جدول 11-14

3- من الشبكة و الجدول نجد:

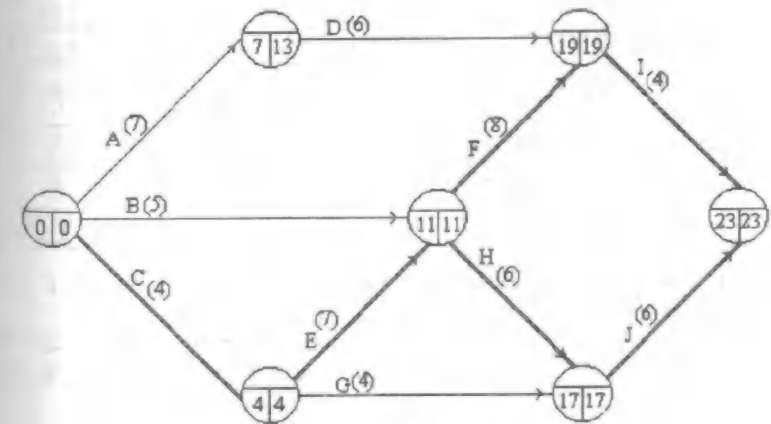
- مدة تنفيذ المشروع العادية هي 24 شهر ، الأنشطة الحرجة هي : C, E, F, I
تكلفة إنجاز المشروع العادية هي 230 ألف دينار.

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المبررة	التكلفة المبررة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
F	8	25	6	35	5-
I	5	18	3	20	1-

جدول 14-14

من الجدول نجد أن النشاط الذي له أقل ميل هو النشاط I، لذلك نخفضه بأكبر مدة ممكنة، وبالعودة إلى جدول أزمدة المسارات أعلاه نجد أن الزمن الذي يلي زمن المسار الحرج هو 23 شهر، و بالتالي فإنه لا يمكننا تخفيض مدة هذا النشاط سوى بشهر واحد، لتصبح مدته 4 أشهر وتزداد تكلفته بوحدة واحدة أي بألف دينار لتنتقل من 18 ألف دينار إلى 19 ألف دينار. و النتيجة هي أن تصبح مدة تنفيذ المشروع 23 شهر بدل 24، و تنتقل التكلفة من 230 ألف دينار إلى 231 ألف دينار. بعد التخفيض يصبح لنا الآن أكثر من نشاط حرج، كما يظهر في الشبكة الموالية:



شكل 14-20

ظهر لنا مساران حرجان جديداً هما:

- المسار الأول (الأصلي): C,E,F,I

- المسار الجديد: C,E,H,J

نوجد من جديد جدول أزمدة المسارات بعد تخفيض مدة النشاط I بشهر واحد، ثم نقارن ميل التكاليف للأنشطة المسارين الحرجين:

جدول أزمدة المسارات

بعد تخفيض مدة النشاط I بشهر واحد

المسار	زمن التنفيذ العادي	زمن التنفيذ المتسرع	المدة المخفضة
A,D,I	17	12	1
B,F,I	17	12	1
B,H,J	17	13	-
C,E,F,I	23	18	1
C,E,H,J	23	19	-
C,G,J	14	12	-

جدول 14-15

نعيد مقارنة ميل التكاليف للأنشطة الحرجة من خلال الجدولين التاليين:

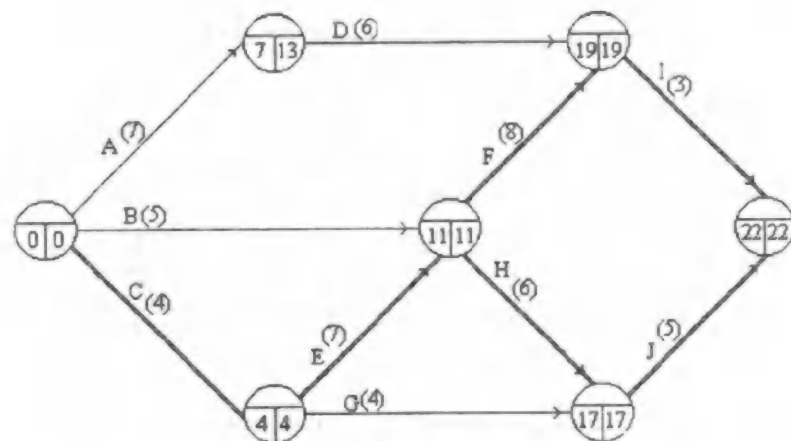
جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المبررة	التكلفة المبررة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
F	8	25	6	35	5-
I	4	19	3	20	1-

جدول 14-16

لاحظ أن مدة تنفيذ النشاط I صارت 4 و تكلفته إنجازته ارتفعت من 18 إلى 19 ألف دينار.



شكل 14-21

غير أن مدة التنفيذ إنخفضت إلى 22 شهر.
نتقل إلى مقارنة ميل التكلفة لأنشطة المسارين الخارجين من جديد:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الخارجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
F	8	25	6	35	5-
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع

جدول 14-18

نما أن النشاطين E و F لهما نفس الميل لذلك نختار أحدهما و ليكن النشاط F، حيث تصبح مدة تنفيذه 7 أشهر بدل 8 أشهر، و تنتقل تكلفة إنجازها من 25 إلى 30 ألف دينار.
أما بالنسبة للمسار الخارج الثاني:

من الجدول يظهر أن النشاط I لازال قابلا للتخفيض و بمدة شهر واحد و المدة هنا لم تعد محكومة بشان مسار من حيث المدة لكنها محكومة بمدة التنفيذ المتسارعة، أي أن مدة تنفيذ هذا النشاط لا يمكنها أن تقل عن 3 أشهر، و كنا قد خفضناها من 5 إلى 4 أشهر و نوصلها الآن إلى 3 أشهر و لا يمكن أن نخفضها عن هذه المدة، و ترتفع تكلفته من 19 إلى 20 ألف دينار.

نتقل الآن إلى جدول مقارنة ميل التكلفة للنشاط الخارج الثاني:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الخارجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
H	6	15	6	15	0
J	6	24	4	30	3-

جدول 14-17

يلاحظ أن النشاط J هو الأقل من حيث ميل التكلفة، لذلك نخفضه بشهر واحد، لتصبح مدة تنفيذه 5 أشهر و يصبح طول المسار الخارج 22 شهر، و ترتفع تكلفة إنجازها من 24 إلى 27 ألف دينار.

و نتيجة للتخفيض في مدة تنفيذ النشاطين I و J تزداد التكلفة الكلية من 231 إلى 235 أي (3+1+231)
و يبقى لنا نفس المسارين الخارجين، كما يظهر في الشبكة الموالية:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
H	6	15	6	15	0
J	5	27	4	30	3-

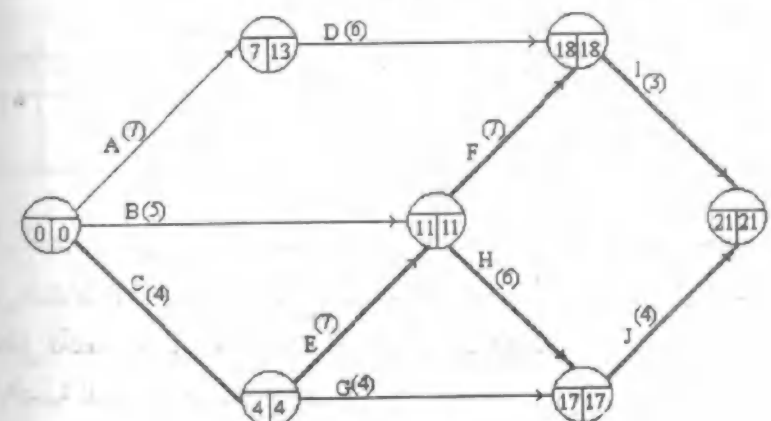
جدول 14-19

نجد أن النشاط J يقابله أقل ميل لذلك نخفضه بشهر واحد، فتصبح مدة تنفيذه 4 أشهر بدل 5 أشهر و ترتفع تكلفته لإنجازه الى 30 بدل 27 ألف دينار.

و النتيجة هي أن تخفيض مدة النشاط F أدى الى زيادة التكلفة بـ 5 ألف دينار، بينما تخفيض مدة تنفيذ النشاط J بشهر واحد أدى الى زيادة التكلفة بـ 3 آلاف دينار، أي أن التكلفة الإجمالية ستصبح: $243 = 8 + 235$ ألف دينار.

أما مدة تنفيذ المشروع فصارت 21 شهر.

و تصبح الشبكة الجديدة كما يلي:



شكل 14-22

و بالمثل نستمر في الاختبار:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
F	7	30	6	35	5-
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن للتسرع

جدول 14-20

نخفض E بشهر واحد، و ترتفع التكلفة بـ 5 آلاف دينار، لتصبح 50 ألف دينار.

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

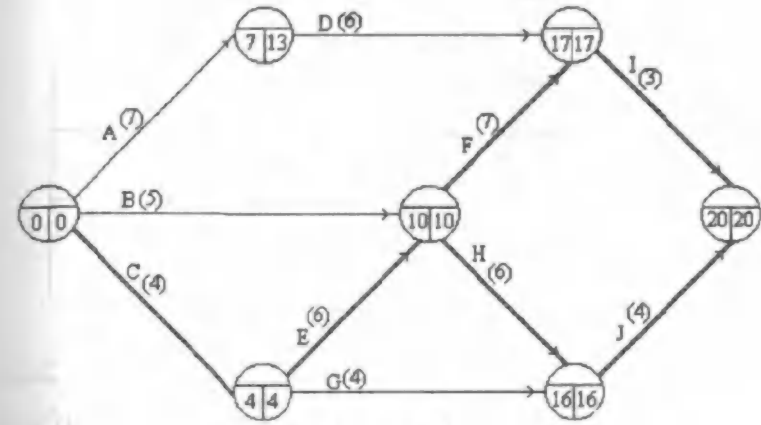
النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	7	40	5	50	5-
H	6	15	6	15	0
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار يساويا للزمن للتسرع

جدول 14-21

يبقى على هذا المسار النشاط E نخفضه بيوم واحد، و ترتفع التكلفة بـ 5 آلاف دينار فتصبح 45 ألف دينار، و يصبح طول المسار الحرج 20 شهرا.

لاحظ أن النشاط E نشاطا مشتركا بين المسارين الحرجين، لذلك فإن التخفيض في المدة يكون واحدة و الزيادة في التكلفة تكون أيضا واحدة، و تصبح التكلفة الجديدة هي: $248 = 5 + 243$ ألف دينار.

و تصبح الشبكة الجديدة كما يلي:



شكل 23-14

نكرر العملية أيضا:
و من خلال الجدولين:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	6	45	5	50	5-
F	7	30	6	35	5-
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع

جدول 22-14

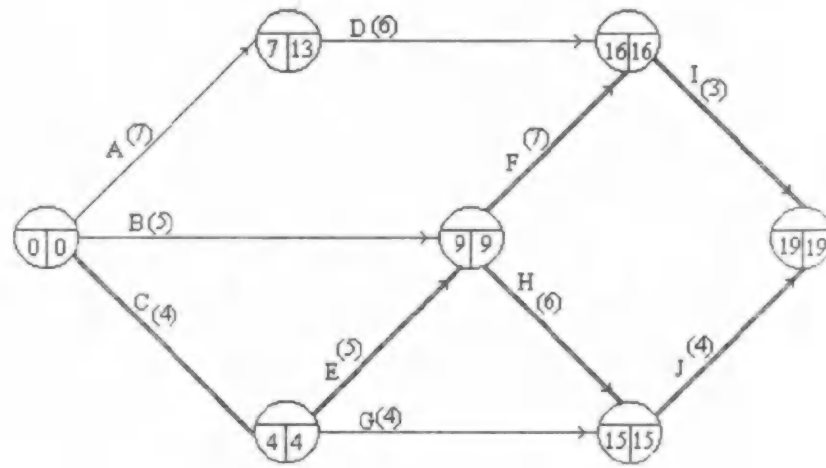
جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	6	45	5	50	5-
H	6	15	6	15	0
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع

جدول 23-14

نرشح ثانية النشاط E للتقليص بشهر واحد، ليصبح 5 أشهر وهي مدة مساوية للمدة المتسارعة، و ترتفع التكلفة بـ 5 فتصبح مدة تنفيذه 50 ألف دينار بدل 45 ألف دينار، لتصبح التكلفة الكلية 253 ألف دينار، و طول المسار الحرج 19 شهر.
و تصبح الشبكة المتسارعة الجديدة هي:



شكل 24-14

نقارن من جديد ميل التكاليف للأنشطة الحرجة من خلال الجدولين التاليين:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	5	50	5	50	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع
F	7	30	6	35	تم تسريعه بشهر
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع

جدول 14-24

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسارعة	التكلفة المتسارعة	ميل التكلفة
C	4	20	4	20	0
E	5	50	5	50	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع
H	6	15	6	15	0
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسارع

جدول 14-25

حيث نلاحظ الآن أن كل الأنشطة الحرجة تم تسريعها، لدرجة يستحيل فيها بعد الآن تسريع أي نشاط آخر يؤدي إلى تخفيض مدة إنجاز المشروع عن 19 شهرا، وبذلك فإن هذا الحل يعتبر هو الحل الأمثل، أي:

19 شهر

مدة تنفيذ المشروع المتسارعة هي:

253 ألف دينار.

تكلفة المشروع المتسارعة هي:

وبذلك يمكن إيجاد جدول المراقبة الزمنية المتسارعة وهو كما يلي:

جدول المراقبة الزمنية المتسارعة

النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ بعد التسريع	الوقت المبكر للبدء	الوقت المبكر للنهاية	الوقت المتأخر للبدء	الوقت المتأخر للنهاية	السماح	طبيعة النشاط	التكلفة بعد التسريع
A	-	7	0	7	3	10	3		30
B	-	5	0	5	4	9	4		10
C	-	4	0	4	0	4	0	حرج	20
D	A	6	7	13	10	16	9		18
E	C	5	4	9	4	9	0	حرج	50
F	B, E	7	9	16	16	16	0	حرج	30
G	C	4	4	8	11	15	7		30
H	B, E	6	9	15	9	15	0	حرج	15
I	D, F	3	16	19	16	19	0	حرج	20
J	H, G	4	15	19	15	19	0	حرج	30
مجموع التكاليف									
253									

جدول 14-26

و يلاحظ أنه تم إختزال خمسة أشهر كاملة، فبعد أن كانت مدة التنفيذ 24 شهر صارت 19 شهر، غير أن هذا الإختزال كان نتيجة لزيادة النفقات، إذ تم إستبدال الخمسة أشهر تلك بـ 23 ألف دينار، إذ انتقلت التكلفة من 230 الى 253 ألف دينار، أي أن معدل الإحلال يبلغ 4.6 ألف دينار زيادة عن كل شهر مختزل.

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسعة	التكلفة المتسعة
A	-	20	400	10	1200
B	-	14	280	7	500
C	-	24	480	12	750
D	A	30	600	15	850
E	A	15	300	8	500
F	B	10	200	5	400
G	D,C	10	200	5	650
H	E	15	300	8	450

المطلوب:

- 4- كون شبكة المشروع.
 - 5- أوجد جدول المراقبة الزمنية العادية و حدد المسار الحرج، و المدة العادية لتنفيذ المشروع و كلفة الإنجاز العادية.
 - 6- أوجد جدول الأوقات المتسعة و حدد مدة و تكلفة التنفيذ المتسعة.
- تمرين 6:** الجدول التالي يظهر الأنشطة اللازمة لإنجاز مشروع ماء، و المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأشهر.

رقم النشاط	اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة النشاط بالأيام
1	استعداد و تجهيز	-	6
2	توريد مواد	-	10
3	الحفر	1	12
4	البناء التحتي	2 و 3	16
5	خرسانة الطابق الأرضي	4	18
6	انضاج خرسانة و فك قوالب الطابق الأرضي	5	12
7	خرسانة الطابق الأول	5	18
8	انضاج خرسانة و فك قوالب الطابق الأول	7	12
9	جدران الطابق الأرضي	6	14
10	جدران الطابق الأول	8 و 9	14
11	تمديد الكهرباء و المياه و المجاري	10	16
12	أطر الأبواب و النوافذ	10	6
13	بياض الطابق الأرضي	11 و 12	12
14	بياض الطابق الأول	13	12
15	تبييض الطابق الأرضي	13	12
16	تبييض الطابق الأول	14 و 15	12

تمارين:

- 1: اعط تعريفاً لشبكة الأعمال.
- 2: حدد أهمية و فوائد طريقة المسار الحرج.
- 3: اعط تمريفاً تصورياً لمشروع بناء مصنع، مفصلاً فيه الأنشطة و مدد إنجازها، ثم قم برسم شبكة المشروع و أوجد جميع الأوقات و حدد الأنشطة الحرجة و مدة إنجازها.
- 4: لإنجاز مستودع قامت المؤسسة المكلفة بإنجازه إلى تجزئة هذا المشروع إلى 10 أنشطة، مدة تنفيذ كل نشاط و منطقية تتابع الأنشطة مبينة في الجدول التالي:

رمز النشاط	الأنشطة	الأنشطة السابقة	مدة النشاط العادية	التكلفة العادية	المدة المتسعة	التكلفة المتسعة
A	الحصول على مخطط المشروع	-	12	120	6	240
B	تحضير الأرضية	-	6	60	3	120
C	طلب لوازيم البناء	A	3	30	1.5	60
D	حفر الأسس	A,B	3	30	1.5	60
E	طلب الأبواب و النوافذ	A	6	60	3	120
F	تسليم اللوازم	C	6	60	3	120
G	وضع الأسس	D,F	6	60	3	120
H	تسليم الأبواب و النوافذ	E	30	300	15	600
I	وضع الجدران و الأسقف	G	12	120	6	240
J	تركيب الأبواب و النوافذ	H,I	3	30	1.5	60

المطلوب:

- 1- كون شبكة المشروع.
 - 2- أوجد جدول المراقبة الزمنية العادية و حدد المسار الحرج، و المدة العادية لتنفيذ المشروع و كلفة الإنجاز العادية.
 - 3- أوجد جدول الأوقات المتسعة و حدد مدة و تكلفة التنفيذ المتسعة.
- تمرين 5:** الجدول التالي يظهر الأنشطة اللازمة لإنجاز أحد المشاريع، إضافة إلى المدة العادية و المتسعة و التكلفة العادية و المتسعة لإنجاز كل نشاط.

16	16	تركيب الأبواب و النوافذ	17
18	15	التركيبات الكهربائية و الصحية للأرضي	18
18	16 و 18	التركيبات الكهربائية و الصحية للأول	19
12	18	دهان الطابق الأرضي	20
12	20 و 19	دهان الطابق الأول	21
30	12	بياض الواجهات الخارجية	22
14	7	أعمال السطح	23
6	22 و 19	توصيلات خارجية	24
3	21 و 24 و 17 و 23	تجارب و تسليم	25
6	25	اسبوع احتياطي للطوارئ	26

المطلوب:

- 1- ارسم شبكة الأعمال.
- 2- احسب جميع الأوقات.
- 3- ماهي مدة تنفيذ المشروع و ماهي أنشطته الحرجة.

الفصل الخامس مخر

أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات P.E.R.T

يستخدم أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات في إيجاد المسار الحرج لتنفيذ الأعمال التي تتصف بعدم التأكد في الأوقات المطلوبة في تنفيذ الأنشطة التي تتكون منها شبكة الأعمال، أي في المشروعات التي تتسم بعدم توافر معلومات أكيدة عن الأوقات المطلوبة لأداء الأنشطة المختلفة، خاصة في مجال البحوث العلمية و المشاريع الجديدة غير المسبقة بحالات مماثلة.

و من الشروط التي يجب توافرها في المشاريع التي يمكن تحليلها بواسطة أسلوب بيرت ما يلي :

- أن يتكون المشروع من عدد من الأنشطة المحددة تحديدا واضحا.

- يمكن بدء أو توقيف هذه الأنشطة بشكل مستقل عن بعضها و لكن في تنابع معروف.

- أن يكون لهذه الأنشطة ترتيب معين في الأداء.

- يمكن تحديد أوقات احتمالية لتنفيذ كل نشاط.

أولا: حساب مختلف الأوقات: في مثل هذه المشاريع التي تخضع لظروف عدم التأكد يتم تقدير 3 أنواع من الأوقات لكل نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع و هي:

الوقت المتفائل: و هو أقصر وقت ممكن يمكن أن يتم تنفيذ النشاط خلاله.

الوقت المتخاف: و هو أطول وقت يتم تنفيذ النشاط خلاله.

الوقت الأكثر احتمالا: وهو الوقت الذي يغلب الظن على تنفيذ النشاط خلاله و يقدر بناء على الاستفادة من مشاريع مماثلة تم تنفيذها سابقا.

بناء على هذه الأوقات يتم حساب الوقت المتوقع لتنفيذ أي نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع، وهذا بالاعتماد على المعادلة التالية:

الوقت المتوقع = الوسط الحسابي المرجح للأوقات الثلاثة.

حيث يفترض أن التوزيعات الخاصة بالأوقات المطلوبة لتنفيذ الأنشطة تخضع لأوزان ترجيحية هي:

الأوزان الترجيحية للأوقات	
الوقت	احتمال الحدوث (الوزن)
الوقت المتشائم	1
الوقت الأكثر احتمالا	4
الوقت المتفائل	1
مجموع الأوزان	6

جدول 1-15

إعتمادا على هذه الأوزان فإن الوقت المتوقع لتنفيذ أي نشاط هو الوسط الحسابي المرجح للأوقات الثلاثة و بالتالي يحسب كما يلي:

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{المتشائم} + 4(\text{الأكثر احتمالا}) + \text{المتفائل}}{6}$$

$$Tés = \frac{Top + 4 \times Tpr + Tpé}{6}$$

أي:

فإذا كانت مدد نشاط ما هي:

المدة التفاؤلية Top : 20 يوم

المدة الأكثر احتمالا هي Tpr : 30 يوم

المدة التشاؤمية Tpé : 60 يوم

فإن المدة المتوقعة لإنجاز النشاط T és هي:

$$Tés = \frac{20 + 4 \times 30 + 60}{6} = 33.33$$

أي شهر و ثلاثة أيام تقريبا.

بعد أن يتم احتساب الوقت المتوقع لكل نشاط بناء على المعادلة أعلاه، يتم حساب الوقت المتوقع للمشروع بنفس طريقة CPM.

و من المفيد تحديد درجة الثقة لهذا التقدير بالطرق الإحصائية وذلك عن طريق اختبار درجة التغير في تقديرات الأوقات المتفائلة و المتشائمة و مقدار الاختلاف بينها عن الوقت الأكثر احتمالا، فإذا ما وجدنا أن مقدار الاختلاف بين الأوقات الثلاثة كبيراً، فإن ذلك يدل على أن درجة الثقة في التقدير الخاص بالوقت المتوقع سوف يكون ضعيفاً.

و بحسب الانحراف المعياري لكل نشاط كما يلي:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{Tpé - Top}{6}\right)^2}$$

مثال 1-15: إذا كان لدينا النشاطين أ و ب و مختلف الأوقات هي:

النشاط أ	النشاط ب
4	6
12	10
14	20

جدول 15-2

فلن الوقت المتوقع لإنجاز النشاطين و الانحراف المعياري للأوقات المتشائمة و المتفائلة لكلا النشاطين يظهر في الجدول التالي:

النشاط أ	النشاط ب
$\frac{4+12 \times 4+14}{6} = 11$	$\frac{6+10 \times 4+20}{6} = 11$
$\sqrt{\left(\frac{14-4}{6}\right)^2} = 1.67$	$\sqrt{\left(\frac{20-6}{6}\right)^2} = 2.33$
2.79	5.43

جدول 15-3

يلاحظ أن النشاطين لهما نفس المدة المتوقعة للتنفيذ، غير أن انحرافيهما المعياريين مختلفين، و من ثم فإننا نقول أن درجة التأكد من تنفيذ النشاط أ في المدة المتوقعة أحسن من درجة التأكد من تنفيذ النشاط ب.

مثال 15-2: البيانات التالية خاصة بتنفيذ مشروع عالي المخاطرة و تظهر في الجدول مختلف أوقات تنفيذ الأنشطة التي يتكون منها بالأشهر:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	14	5	2
B	-	21	18	3
C	A	17	14	5
D	B	8	5	2
E	C, D	7	4	1
F	B	30	15	6

جدول 15-4

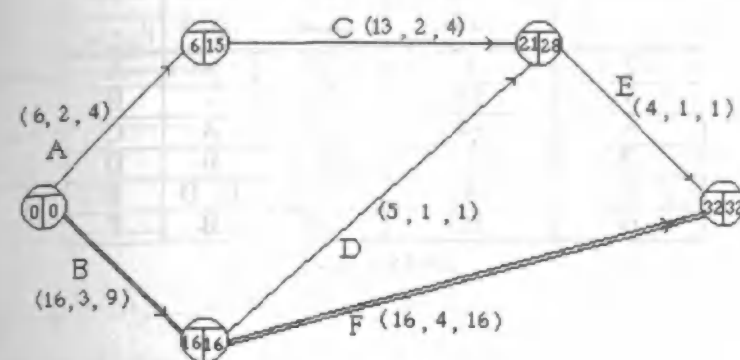
المطلوب:

- 1- أوجد الأوقات المتوقعة لإنجاز كل نشاط.
 - 2- أوجد الانحراف المعياري و تبين كل نشاط.
 - 3- ارسم شبكة الأعمال و حدد المسار الحرج.
- بتطبيق معادلة الوقت المتوقع و معادلة الانحراف المعياري لكل نشاط نحصل على النتائج المعروضة في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتوقع	الانحراف المعياري
A	-	6	2
B	-	16	3
C	A	13	2
D	B	5	1
E	C, D	4	1
F	B	16	4

جدول 15-5

رسم شبكة الأعمال وحساب الأوقات عليها.



شكل 1-15

يظهر أمام كل نشاط في الشبكة الوقت المتوقع والانحراف المعياري والتباين بالترتيب ابتداء من اليسار، بينما يظهر في كل قمة الوقت المتوقع المبكر للبداية والوقت المتوقع المتأخر للنهاية كما تم التطرق لهما في طريقة المسار الحرج. و يظهر لنا الجدول التالي كامل الأوقات المتوقعة الأخرى إضافة الى النشاطين الحرجين.

اسم النشاط	الأثناء السابقة	المدة المتوقعة لتنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة للبداية	الأوقات المتأخرة للنهاية	السماح الكلي	النشاط الحرج
A	-	6	0	6	9	-
B	-	16	0	16	0	حرج
C	A	13	6	19	9	-
D	B	5	16	21	7	-
E	C, D	4	21	25	7	-
F	B	16	16	32	0	حرج

جدول 6-15

و يتبين من خلال الشبكة أن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع هو 32 شهر وأن المسار الحرج يحدده النشاطين B و F.

ثانياً: احتمال تنفيذ المشروع خلال فترة معينة: يتم على الشبكة حساب الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع، غير أن إدارة المشروع قد ترغب في معرفة احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة قد تكون أكبر أو أصغر من الفترة المتوقعة عن طريق الشبكة، لذلك فإنه يتم حساب معامل احتمال تنفيذ المشروع في تلك الفترة و يتم بعد ذلك إستخراج قيمة الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي.

و يحسب معامل الاحتمال عن طريق الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma}$$

حيث Ds هي المدة المرغوبة و تسمى أيضاً المدة المستهدفة، Dé هي المدة المقدرة، σ الانحراف المعياري للأنشطة التي تشكل المسار الحرج.

بعد حساب قيمة الإحصائية Z يتم البحث عن الاحتمال المقابل لها ضمن جدول دالة التوزيع الطبيعي القياسي، حيث أن مدة تنفيذ المشروع تخضع لهذا القانون، فلو افترضنا أن المشروع نفذ عددا كبيرا جدا من المرات طبقا لنفس الخطأ و تم تسجيل مدد التنفيذ في كل مرة ثم تم رسم المنحنى البياني للعلاقة بين المدة و عدد مرات حصولها لكان هذا المنحنى ممثلا لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي، والذي تكون المساحة الواقعة تحته مساوية 1 و يكون احتمال إنهاء المشروع في أو قبل أي وقت مساويا للمساحة الواقعة تحت المنحنى من - ∞ الى غاية الوقت المحدد.

و معلوم أن منحنى التوزيع الطبيعي القياسي يكون في شكل جرس كما يظهر في الشكل الموالي:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{21-3}{6}\right)^2 + \left(\frac{30-6}{6}\right)^2} = 5$$

و يكون احتمال تنفيذ المشروع في الأوقات المشار إليها كما يلي:

* احتمال تنفيذ المشروع في 20 شهر:

$$Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{20 - 32}{5} = -2.8$$

الإحصائية المقابلة هي: من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للإحصائية $Z = -2.8$ هو 0.003 أي 0.3% وهو احتمال ضعيف جدا.

* احتمال تنفيذ المشروع في 30 شهر:

$$Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{30 - 32}{5} = -0.4$$

من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للإحصائية $Z = -0.4$ هو 0.345 أي 34.5%.

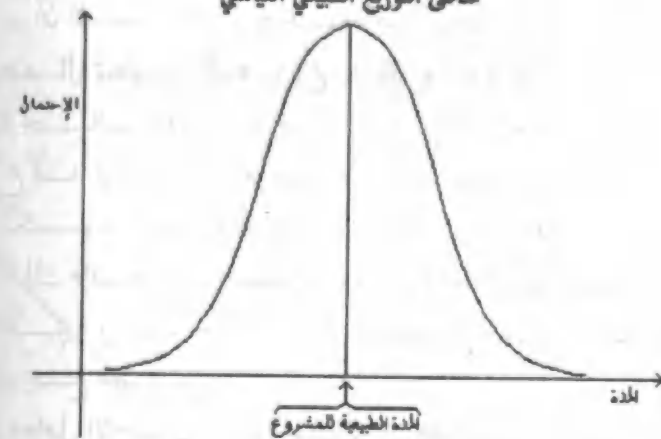
* احتمال تنفيذ المشروع في 35 شهر:

$$Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{35 - 32}{5} = 0.6$$

من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للإحصائية $Z = 0.6$ هو 0.726 أي 72.6%.

أي أن الاحتمال الأكبر هو أن ينفذ المشروع في مدة 35 يوم.

منحنى التوزيع الطبيعي القياسي



شكل 2-15

و يحصل على قيمة الاحتمال من الجدول التالي:

الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z
0.1587	1-	0.0228	2.0-	0.0013	3-	0.9772	2	0.8413	1.0
0.1841	0.9-	0.0287	1.9-	0.0019	2.9-	0.9821	2.1	0.8643	1.1
0.2119	0.8-	0.0359	1.8-	0.0026	2.8-	0.9861	2.2	0.8849	1.2
0.2420	0.7-	0.0446	1.7-	0.0053	2.7-	0.9893	2.3	0.9032	1.3
0.2743	0.6-	0.0548	1.6-	0.0047	2.6-	0.9918	2.4	0.9192	1.4
0.3058	0.5-	0.0668	1.5-	0.0062	2.5-	0.9938	2.5	0.9332	1.5
0.3446	0.4-	0.0808	1.4-	0.0082	2.4-	0.9953	2.6	0.9452	1.6
0.3821	0.3-	0.0968	1.3-	0.0107	2.3-	0.9965	2.7	0.9554	1.7
0.4207	0.2-	0.1151	1.2-	0.0139	2.2-	0.9974	2.8	0.9641	1.8
0.4602	0.1-	0.1357	1.1-	0.0179	2.1-	0.9981	2.9	0.9713	1.9
0.500	0			0.0228		0.9987	3		

جدول 7-15

مثال 15-3: أوجد احتمال تنفيذ المشروع المشار إليه في المثال

السابق في 20 شهر، في 30 شهر و في 35 شهر.

يتم أولاً إيجاد الانحراف المعياري للنشيطين الحرجين كما يلي:

تمارين

تمرين 1: ما الفرق بين طريقة CPM و طريقة PERT

تمرين 2: البيانات التالية تظهر الأنشطة الخاصة بتنفيذ إحدى المشروعات وكذا مدد تنفيذها بالأشهر.

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتزامن	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	5	6	7
B	-	4	5	18
C	A	4	15	20
D	B, C	3	4	5
E	A	16	17	18

المطلوب:

- ارسم شبكة الأعمال.
- حدد الوقت المتوقع لتمام المشروع، و حدد الأنشطة الحرجة.
- أوجد احتمال إنجاز المشروع في 20 شهر، في 30 شهر، في 15 شهر.

تمرين 3: البيانات التالية خاصة بإنجاز مشروع عالي المخاطرة، و تظهر في الجدول التالي مختلف اوقات تنفيذ أنشطته بالأشهر:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتزامن	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	28	10	4
B	A	24	28	10
C	A	14	8	2
D	-	42	24	6
E	D	16	10	4
F	E	60	30	12

المطلوب:

- ارسم شبكة الأعمال.
- حدد الوقت المتوقع لتمام المشروع، و حدد الأنشطة الحرجة.

- أوجد احتمال إنجاز المشروع في 50 شهر، في 30 شهر، في 70 شهر.

تمرين 3: نفس الأسئلة للبيانات التالية:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتزامن	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	4	3	8
B	A	4	1	2
C	B, E	4	2	3
D	-	9	7	7
E	D, I	5	2	3
F	E, J	5	2	3
G	B, E	4	2	3
H	G, F	4	1	2
I	-	10	7	8
J	I	13	10	11
K	J	9	6	7

الفصل السادس عشر التصيير الأمثل للمخزون

أولاً: **مفاهيم حول المخزون:** المخزون مصطلح ملازم للتسيير الرشيد للمنشآت الاقتصادية والاجتماعية والإدارية، لا يقصد به الاحتفاظ لفترة ما بالمواد الأولية التي تدخل في عمليات الصناعات المختلفة فحسب، بل يشمل كل الكميات من السلع سواء كانت مواد أولية أو مواد نصف مصنعة أو كاملة الصنع و المحتفظ بها لفترة زمنية معينة، لاستخدامها لغرض الحفاظ على وتيرة الإنتاج في المصانع ومواجهة احتمالات انخفاض منسوبها وتأثير ذلك على معدلات الإنتاج، أو لضمان التواجد المستمر والمتنظم في الأسواق بالنسبة للمؤسسات التجارية أو لضمان إستمرارية تأدية الخدمات بصفة منتظمة بالنسبة للمؤسسات الخدمية كالمستشفيات والفنادق وغيرها.

ولاشك أن عملية التخزين مكلفة مادياً، فعملية التخزين لا تقتصر نفقاتها فقط على نفقات الإيداع في المخزن لكنها تتعدى ذلك إلى تكاليف توفير الظروف المناسبة للسلعة لتبقى محافظة على خصائصها الفيزيائية وتبقى بالتالي صالحة للاستعمال، فبعض السلع تتطلب توفير ظروف التبريد المناسبة والبعض الآخر يتطلب توفير درجة معينة من الرطوبة والبعض الآخر يتطلب التوظيف والتحرك المستمر... الخ، وكل هذه العمليات مكلفة بدرجة أو أخرى، سواء بسبب العنصر البشري الساهر على عملية التخزين وما ينجر عن ذلك من أجور، و سواء بسبب الوسائل المادية الأخرى المساعدة كالكهرباء وإهلاك الأجهزة المستعملة في العملية أو سواء

بالنسبة لنفقات التسيير الأخرى كإعداد الطلبات و ما ينجر عن ذلك.
و تختلف المواد المخزنة حسب أنواع النشاطات، و من أمثلة ذلك ما يلي:

نوع النشاط	المخزون الرئيسي
الصناعات التحويلية	خامات مختلفة حسب النوع
صناعات استخراجية	أخشاب، حديد، آلات، قطع غيار
نشاطات البناء	إسمنت، حديد، طوب
مؤسسات زراعية	بذور، أسمدة، آلات، قطع غيار
مؤسسات صحية	أدوية، ضمادات، أدوات طبية
مرافق عامة	وقود، معدات أدوات و عناصر مختلفة
إدارات	ورق، أدوات مختلفة

و التخزين كوظيفة أساسية في المؤسسة يعني أيضاً حفظ المنتجات التامة الصنع في المخازن المخصصة لغاية موعد تسليمها حسب العقود المبرمة أو في انتظار البيع، كما يحتفظ أحياناً ببعض الأجزاء و قطع الغيار اللازمة لخدمة المنتج النهائي حين صرفه تنفيذاً لعقود البيع، و عادة ما تلجأ المؤسسة لإيجاد إدارة خاصة بالمخازن هي إدارة المخازن.

ثانياً: إختصاصات إدارة المخازن: لتسيير المخزون بكفاءة عالية تنشأ له عادة إدارة خاصة هي إدارة المخازن، التي يكون من مهامها ما يلي:

- إعداد دليل الأصناف المخزنة و ترتيبها وفق نمط معين.
- إستلام المواد الداخلة للمخزن و فحصها و تحديد مدى مطابقتها للمواصفات المطلوبة.

- التخزين المادي و حماية المواد المخزنة من التلف وتوفير الشروط التقنية لحفظها.
- إمساك سجلات المخزون و الإدارة المستمرة للموارد الداخلة و الخارجة باستمرار و السهر على تسجيلها.
- و لعل من بين أهم إختصاصات إدارة المخازن، هي حفظ المخزون و تسييره بأمنية، حيث عليها أن تتجنب إشكالتان:
- الأولى و هي الإفاضة في المخزون، و هذا ما يؤدي بها الى تحمل تكاليف زائدة.
- الثانية و هي الإحتفاظ بمستويات دنيا من المخزون، و هذا ما يؤدي بها الى تعريض حلقات الإنتاج الى العطل، إذا كانت المؤسسة إنتاجية، أو الى تعريض مكائنها للخطر في السوق إذا كانت المؤسسة تجارية، و في كلا الحالتين تعرض نفسها للخسارة.

و يظهر من كل ما سبق أن المخزون من الناحية القيمة هو حيز جزء من أموال المؤسسة عن التداول، بغية أن تخلق لها مداخيل في المستقبل، بفعل السماح باستمرار الإنتاج أو استمرارية تواجد المؤسسة في السوق.

و لتسهيل أعمال إدارة المخازن في ظل التطور التقني، لا بد من اللجوء الى البرامج المعلوماتية و إستخدام أجهزة الإعلام الآلي.

ثالثاً: نظم التخزين: يتم العمل بأحد النظامين التاليين أو كلاهما معاً:

1- نظام المخازن المغلقة: و هو الأعم حيث يتم

تخزين الأصناف المختلفة في أماكن مونة لا يسمح بدخولها إلا للعاملين بها، و يكون إستلام الأصناف و صرفها بموجب نظام إداري معين، و أهمية هذا النظام تتجلى في توفير أقصى قدر من الأمان و الرقابة على المواد المخزنة و المصروفة.

2- نظام المخازن المفتوحة: يطبق هذا النظام في صناعات الإنتاج الكبير والمتكرر، حيث يكون الطلب على الأصناف مستمرا ومحددا تحديدا دقيقا، حيث تخزن الأصناف في أرفف مهيبة بأماكن أقرب ما يمكن من أماكن سلسلة الاستخدام، بحيث تكون في متناول أي من العاملين في سلسلة الإنتاج المعنية، وعادة ما يلجأ إلى هذا النظام لضمان سرعة إنجاز عمليات الإنتاج و ربح الوقت.

رابعاً: وظائف المخزون: للمخزون عدة وظائف أساسية منها ما يلي:

1- الموازنة بين العرض والطلب: يعتبر المخزون وسيلة لموازنة العرض مع الطلب، ففي حالة زيادة الطلب على العرض يلجأ إلى سد العجز عن طريق المخزون، ويحدث العكس في حالة ما إذا انخفض الطلب على العرض حيث يلجأ إلى إحالة الفائض على المخزون، ليستغل في مراحل لاحقة.

2- الحفاظ على استمرارية الإنتاج: الكثير من السلع تكون معمورة و بالتالي فهي متواجدة في السوق باستمرار يمكن لإدارة الإنتاج أن تقتنيها في أي وقت تشاء، غير أن بعض السلع الأخرى تكون سريعة التلف والبعض الآخر منها يكون موسمي حيث تظهر الكميات ضخمة خلال موسم الجني، ثم يتناقص تواجدها في السوق، ولضمان تزويد المصنع باستمرار، يلجأ إلى شرائها بكميات كبيرة في موسم الجني وتخزينها في ظروف تسمح بالحفاظ على خواصها لاستعمالها عند الطلب، مما يسمح باستمرار العملية الإنتاجية على مدار السنة.

3- تخفيض تكاليف الإنتاج: سياسة التخزين الناجحة تسمح للمؤسسات الإنتاجية بالإنتاج بكميات كبيرة حتى وإن كان الطلب أقل من الإنتاج وهذا ما يسمح بتخفيض كلفة إنتاج الوحدة المنتجة الواحدة، كما يسمح التخزين من الشراء بكميات كبيرة وهذا ما يخفض من سعر الوحدة المشتراة نتيجة للخصومات بسبب الشراء بكميات كبيرة، إضافة إلى انخفاض تكاليف النقل و مختلف النفقات المتعلقة بالتخزين.

4- إرضاء المستهلك: بسبب سياسة التخزين الناجحة فإن السلعة تكون مضمونة التواجد المستمر في السوق وبأسعار معقولة، وهذا ما ينعكس من جهة على سمعة المؤسسة ومن جهة أخرى على راحة و رضاء المستهلك.

خامساً: أنواع المخزون: من أنواع المخزون ما يلي:

1- مخزون حجم الطلبية: وهو الموجه لمقابلة طلبات العملاء العادية و يتحدد حجمه تبعاً لتكاليف الأوامر و النقل إضافة إلى تكلفة الحزن.

2- مخزون الأمان: و يسمى أيضاً مخزون عدم التأكد، و يتم إنشاؤه لمقابلة الطلب الطارئة غير المتوقع، و تستخدم المؤسسة نوعين من مخزون الأمان، مخزون الأمان القبلي و قد يتكون من المواد الأولية الأساسية التي تستخدمها في عملية الإنتاج التي تقوم بها، و يلجأ إليه لمواجهة أي طارئ في التموين بالمواد الأولية، أما مخزون الأمان البعدي فيتكون أساساً من منتجات المؤسسة، و يتم الاحتفاظ به لضمان التواجد الدائم للمؤسسة في السوق، حيث يلجأ إليه عند الزيادة غير المتوقعة للطلب على منتجات المؤسسة أو عند توقفها عن الإنتاج لأي سبب من الأسباب، و يتحدد حجمه الأمثل

باستخدام بعض العوامل مثل تكلفة التخزين و تكلفة العجز أو الربح الضائع.

3- **المخزون الموسمي:** يُنشأ لمقابلة الطلب الذي يتزايد في أوقات معينة من السنة، فبعض المنتجات يكون إستهلاكها فصلي و الآخر يكون إستهلاكها خلال مواسم دينية... الخ، و لابد للمؤسسة أن تخطط لتغطية الطلب الزائد خلال هذه المواسم عن طريق تخزين كاف، و لتحديد حجم هذا المخزون تلجأ المؤسسة الى وسائل التنبؤ المستقبلي للإستهلاك خلال هذه المواسم عن طريق معطيات سابقة.

مادام: تكاليف المخزون: تختلف تكاليف المخزون حسب طبيعة المواد المخزنة، غير أنه يمكن تقسيمها الى قسمين هما:

1- **تكاليف الطلبية:** و تتضمن حمل التكاليف المترتبة على طلب الشراء، كتكلفة إعداد طلب الشراء و إرساله الى المورد أو البائع و تكاليف متابعته، إضافة الى تكاليف الاستلام كالإختبار و الفحص و النقل... الخ

2- **تكاليف التخزين:** و تشمل التكاليف المتعلقة بعملية التخزين في حد ذاتها للمواد، كتكلفة التبريد و الأجهزة المستخدمة لتوفير شرط التخزين، و المواد الكيماوية المستعملة للحفظ، إضافة الى التكاليف الأخرى. كتكاليف أجهزة الإعلام الآلي المستعملة في تسيير المخزون و تكاليف حمايته و تقادمه، و تكاليف الفوائد و الأرباح الضائعة بسبب تجميد جزء من رأس مال المؤسسة، إضافة الى تكاليف التأمين والضرائب و كراء محلات التخزين، و مصاريف الصيانة والإصلاح، و مرتبات العاملين على تسيير المخزون و حراسته، كما تشمل تكاليف المخاطرة كتكلفة تقادم المخزون و الخسائر الناجمة عن تلف أجزاء منه... الخ.

مادام: نموذج كمية الطلب الاقتصادية - نموذج ويلسون: يقصد بكمية الطلب الاقتصادية، كمية المخزون التي يتم طلبها و التي تجعل مجموع تكاليف المخزون في أدنى قيمها، وهي كمية يتم إشتقاقها رياضيا بناء على نموذج ويلسون.

1- **فرضيات النموذج:** يقوم النموذج على أربع فرضيات أساسية هي:

أ- أن الطلب معروف و محدد بقيمة ثابتة و هو لا يتغير عبر الزمن، و هو مستمر.

ب- أن الطلبية تلي حالا، أي أن الوقت بين إعداد الطلبية و وصول السلعة يكون معدوما.

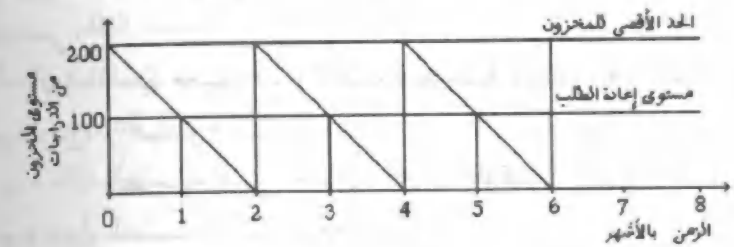
ج- أن السلعة تكون جاهزة حالا و لا ينتظر قدومها مستقبلا أو لا ينتظر تركيبها حتى تصبح جاهزة.

د- أن تلبية كل الطلبات تنجم من المخزون الحالي.

2- **ملوك المخزون عبر الزمن:** إن إدارة المخزون تتركز على أن يكون المخزون عند مستوى معين في أي وقت، بحيث أن المخزون يتكون حالا قبل وصول الكمية المخزنة الى الصفر، بافتراض أن مؤسسة ما تقوم بتسويق الدراجات النارية، بحجم 100 دراجة شهريا، و بافتراض أن هذه المؤسسة تتبع سياسة بحيث تسمح لها بالحصول على مخزون أول كل شهر يبلغ 200 دراجة، ويعني ذلك أن هذا المخزون سينفذ بعد شهرين، لذلك يجب عليها أن تصدر أوامر الشراء لتعويض الكمية المباعة قبل نهاية الشهر الثاني، كما يجب عليها جدولتها مواعيد الاستلام بحيث تصل كميات التعويض الى المخزن قبل توزيع آخر دراجة و هذا بغية تخفيض تكاليف الاحتفاظ

بالمخزون الى أدنى قيمة ممكنة، ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كما يلي:

سلوك مستوى المخزون عبر الزمن

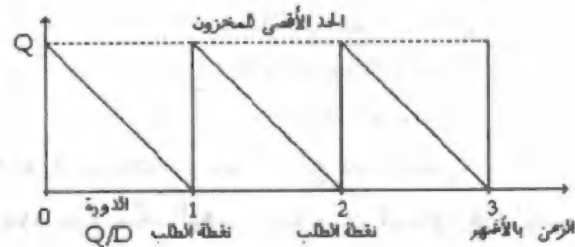


شكل 1-16

يلاحظ من الرسم أن المخزون يتحدد باستمرار، و أن المؤسسة تبيع 100 وحدة شهرياً وتحصل على الطلبية الجديدة قبل انتهاء مخزونها، حيث أن الحد الأقصى لمخزونها من الدراجات يبلغ 200 وحدة، وأن المخزون يتعاود بانتظام عبر الزمن.

وعادة ما تقوم المؤسسة بإصدار أمر التوريد عند وصول المخزون الى مستوى معين، ويشار الى ذلك بنقطة إعادة الطلب، وتحدد هذه النقطة وفق عدة اعتبارات منها معدل التسويق و فترة التوريد، ويكون للخبرة السابقة والقدرة على توقعات الاستهلاك واحتمالات التأخر في التوريد الأهمية الكبرى في تحديد هذه النقطة، وقد تتحدد عند وصول مستوى المخزون الى النصف أو الثلث...، وفي كل الحالات يجب تفادي إصدار أمر التوريد عند نفاذ الكمية كلية، وفي الشكل

أعلاه يمكن أن يكون مستوى إعادة الطلب عند الكمية 100 دراجة، ولا ينتظر أن تصل الكمية الى الصفر لإعادة الطلب. فإذا كان حجم الطلبية الواحدة هو Q وحدة يتم بيعها للمستهلكين الذين يطلبون هذه المادة بمعدل ثابت قدره D وحدة في السنة فإنه من خلال الشكل الموالي يظهر أنه:



شكل 2-16

في الفترة صفر تم إستقبال طلبية قدرها Q استهلك بمعدل D وحدة في السنة و بالتالي فإن المخزون ينتهي بعد فترة من الزمن تقدر بـ Q/D وهي ما يعبر عنها بالدورة، وعند ذاك يتم إستقبال كمية أخرى قدرها Q أيضا فيعود المخزون الى مستواه الأصلي عند بداية الدورة الثانية وتستمر العملية بهذا الشكل. فإذا كان حجم الطلبية مثلاً هو $Q=100$ وحدة، وأن معدل الطلب السنوي هو $D=1200$ وحدة، فإن الدورة الواحدة للمخزون هي Q/D أي: $1/12$ أي شهر واحد.

3- التحديد الرياضي لكمية الطلب الاقتصادية:
لتحديد كمية الطلب الاقتصادية رياضياً نستخدم على مايلي:

الرمز	الإشارة
Q	حجم الطلبية كما تم تعريفها سابقا بالوحدات
D	معدل الطلب السنوي بالوحدات
C	تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المخزون
F	التكلفة الثابتة لكل طلبية
R	معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة
Tc	مجموع تكاليف المخزون السنوية
Toc	مجموع تكاليف الطلبيات خلال السنة
THc	مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون في السنة
Q/2	متوسط المخزون

من خلال هذه المصطلحات نستنتج ما يلي:

• مجموع تكاليف التخزين لدورة واحدة: وهي

عبارة عن مجموع تكاليف الطلبيات مضافا إليها مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون لمدة دورة واحدة.

واضح أن تكاليف الطلبيات خلال دورة واحدة ثابتة لكل طلبية و بالتالي فهي F بينما تكاليف الاحتفاظ بالمخزون خلال دورة واحدة فيمكن كتابتها بدلالة متوسط المخزون، فإذا كان متوسط المخزون هو $Q/2$ و تكلفة شراء الوحدة الواحدة منه هي C فإن قيمة متوسط المخزون هي:

$$C \times \frac{Q}{2} \quad 1-16$$

وبما أن R هو معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة، لذلك فإن مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون خلال سنة هو:

$$C \times R \times \frac{Q}{2} \quad 2-16$$

وحيث أن السنوات الموجود في دورة واحدة هو Q/D (يكون في الغالب رقم عشري)، فإن مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون خلال دورة واحدة هو:

$$C \times R \times \frac{Q}{D} \times \frac{Q}{2} \quad 3-9$$

و يمكن كتابة 3-16 على النحو التالي:

$$C \times R \times \frac{Q^2}{2D} \quad 4-16$$

و بالتالي يمكن صياغة تكاليف المخزون خلال دورة واحدة لتصبح كما يلي:

$$F + C \times R \times \frac{Q^2}{2D} \quad 5-16$$

• **مجموع تكاليف التخزين خلال دورات السنة:** بما أن عدد الدورات في السنة عبارة عن الطلبيات خلالها، لذلك فإن عدد الدورات في السنة نحصل عليه بقسمة حجم الطلب السنوي على كمية الطلبية الواحدة أي: D/Q و منه فإن مجموع تكاليف التخزين خلال السنة هو:

$$Tc = (F + C \times R \times \frac{Q^2}{2D}) \times \frac{D}{Q} \quad 6-16$$

و بالإختزال نجد أنه يمكن كتابة مجموع تكاليف التخزين خلال دورات السنة على النحو:

$$Tc = F \times \frac{D}{Q} + C \times R \times \frac{Q}{2} \quad 7-16$$

• **إستراتيجية كمية الطلب الاقتصادية:** إن هدف المؤسسة هو تدنئة مجموع التكاليف هذه، أي إيجاد كميات الطلب التي تجعل التكاليف في أدنى قيمة لها.

و كما هو معروف لإيجاد القيمة التي تجعل الدالة في أدنى قيمة لها، فإنه يتم إيجاد مشتقتها الأولى و مساواتها للصفر، ثم اختبار مشتقتها الثانية إذا ما كانت أكبر من الصفر.

لذلك نشتق المعادلة 7-16 و نساوي النتيجة الى الصفر.

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q} = \frac{-F \times D}{Q^2} + C \times R \times \frac{1}{2} = 0$$

و منه نجد:

$$\frac{F \times D}{Q^2} = \frac{C \times R}{2} \quad 8-9$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$Q^2 \times C \times R = 2 \times F \times D$$

و عليه فإن كمية الطلب الاقتصادية يمكن كتابتها كما يلي:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot F}{C \cdot R}} \quad 9-16$$

للتذكير فإن :

Q : كمية الطلب الاقتصادية

D : حجم المبيعات السنوية

F : تكلفة الطلبية للدورة الواحدة

C : تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المخزون

R : معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة

سنة.

مثال 1-16: تبلغ المبيعات السنوية لمؤسسة تسويق الإسمت

120.000 طن سنوياً، تكلفة الطن الواحد 100 دج، فإذا كانت

تكلفة الطلبية الواحدة تبلغ 300 دج، و معدل تكلفة الاحتفاظ

بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة يبلغ 10%،

المطلوب: حدد كمية الطلب الاقتصادية.

الجواب:

من المعطيات نجد: $R = 0.1$ $C = 100$ $D = 120.000$ $F = 300$
بالتعويض نجد:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot F}{C \cdot R}} = \sqrt{\frac{2 \times 120000 \times 300}{100 \times 0.1}} = 2683.3$$

أي أن كمية الطلب الاقتصادية التي تجعل التكلفة في أدنى مستوياتها هي 2683 وحدة.

عدد الدورات أو عدد الطلبيات في السنة و نحصل عليه بقسمة الطلب السنوي على كمية الطلب الاقتصادية حيث نجد 44 دورة أي 44 طلبية في السنة أي يتم الطلب كل 8 أيام تقريباً إذا اعتبرنا أن المؤسسة تشتغل طوال السنة و أن عدد أيام السنة هو 366 يوم.

و تكون التكلفة الدنيا المحتملة:

$$Tc = F \times \frac{D}{Q} + C \times R \times \frac{Q}{2} = 300 \times \frac{120000}{2683.3} + 100 \times 0.1 \times \frac{2683.3}{2} = 13550.66$$

مثال 2-16: إذا كان حجم المبيعات السنوية لمؤسسة الأسمدة الفلاحية هو 200000 طن سنوياً، و أن تكلفة شراء الطن الواحد هي 2000 دج، و أن تكلفة الطلبية الواحدة تبلغ 5000 دج، و معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة واحدة تبلغ 25%.

المطلوب: 1- ماهي كمية الطلب الاقتصادية

2- ماهو عدد الطلبيات السنوية المثلى.

3- ما هو طول الدورة الواحدة إذا كانت

المؤسسة تتوقف عن العمل لمدة شهر واحد كعطلة سنوية.

4- أوجد التكلفة الدنيا.

الجواب:

لدينا: $D=200000$ $F=5000$ $C=2000$ $R=0.25$

1- إيجاد كمية الطلب الاقتصادية:

تعطى كمية الطلب الاقتصادية بالمعادلة:

$$Q = \sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}}$$

بالتعويض نجد:

$$Q = \sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}} = \sqrt{\frac{2 \times 200000 \times 5000}{2000 \times 0.25}} = 2000$$

أي أن تكلفة الطلب الاقتصادية تبلغ 2000 طن في كل دورة

2- **محدد الطلبات المثلى سنوياً:**

يتم الحصول عليها بقسمة الطلب السنوي أو المبيعات السنوية

على كمية الطلب الاقتصادية حيث نجدها: 100 طلبية.

بما أن المؤسسة تتوقف لمدة شهر عن العمل، لذلك فإن أيام

العمل خلال السنة تبلغ 366-30=336 يوم

3- **طول الدورة الواحدة:** بقسمة أيام العمل السنوية على عدد الطلبات

نجد: 3.36 يوم أي أنه يتم تقديم طلبية كل ثلاثة أيام تقريباً.

4- **التكلفة الدنيا المحتملة هي:**

$$Tc = F \times \frac{D}{Q} + C \times R \times \frac{Q}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$Tc = F \times \frac{D}{Q} + C \times R \times \frac{Q}{2} = 5000 \times \frac{200000}{2000} + 2000 \times 0.25 \times \frac{2000}{2} = 1000000$$

أي أن التكلفة الدنيا تبلغ مليون دينار.

ثامناً، نموذج العيـه الأمثل للإنتاج: يختلف هذا النموذج عن نموذج كميات الطلب الاقتصادية في أن هذا النموذج يكون الهدف فيه هو تحديد الحجم الأمثل الذي يجب إنتاجه عند كل تشغيلية للورشات، والذي يجعل مجموع التكاليف أقل ما يمكن، ويتم استخدام هذا النموذج خاصة في خطوط الإنتاج التي لا تشتغل باستمرار، أي أن الإنتاج فيها يتم بناء على طلب التوريد.

ويمكن تقسيم هذه التكاليف الى نوعين هما:

1- **تكاليف الإعداد للتشغيل:** تشمل هذه التكاليف عدة عناصر منها تكاليف إعداد خطوط الإنتاج والآلات، إضافة الى تكاليف طلب المواد الوسيطة اللازمة للعملية للإنتاجية.

2- **تكاليف الاحتفاظ بالمخزون:** وهي التكاليف العادية الناجمة عن الاحتفاظ بالمخزون لفترة معينة، كما تم التطرق الى ذلك فيما سبق من هذا الفصل.

و يقوم هذا النموذج بناء على عدة فرضيات منها ما يلي:

- الطلب محدد و بمعدل ثابت

- الزمن المحصور بين طلب البدء في الإنتاج و البدء

الفعلي له قد يكون معدوماً، او غير معدوم.

- لا يسمح إلا بالتغطية الكلية للطلبات، أي لا يسمح

بتغطية جزء فقط من الطلب.

3- **مستوى المخزون خلال الزمن:** يتكون المخزون في

هذه الحالة بتراكم الفارق بين الإنتاج و الطلب، فما دام الإنتاج

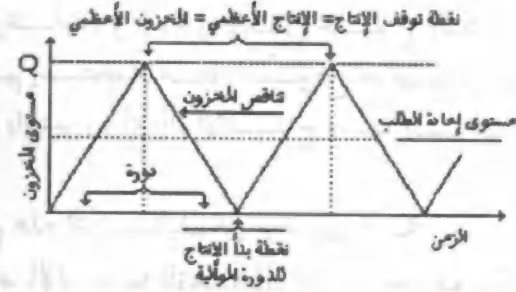
أكبر من الطلب فإن مستوى المخزون يتزايد تدريجياً مع تزايد

الزمن حتى يصل الى أعلى مستوياته، و حينئذ يتوقف الإنتاج

فائتاً، في حين يستمر الطلب على الكميات المنتجة المخزنة، الى

حين وصول المخزون الى مستوى معين، و حينئذ يشـرع في

الإنتاج مرة أخرى، ليزيد المخزون مرة أخرى حتى وصوله إلى أعلى المستويات، وتكرر نفس العملية باستمرار، وهذا ما يظهر في الشكل الموالي:



شكل 3-16

4- إيجاد كميات الإنتاج الاقتصادية: لإيجاد كميات الإنتاج الاقتصادية يتم اتباع نفس منهجية إيجاد كميات الطلب الاقتصادية مع بعض الفارق، ولأجل ذلك نستخدم على ما يلي:

كميات الإنتاج في التشغيل الواحدة	Q
معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة	D
تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون	C
التكلفة الثابتة لكل تشغيل	F
تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة	R
معدل كميات الإنتاج خلال السنة مع: $P > D$	P
مجموع تكاليف التشغيل و الاحتفاظ بالمخزون في السنة	Tc
مجموع تكاليف التشغيل السنوية	Toc
مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون السنوية	THc

و من ذلك نجد:

1- مجموع تكاليف التشغيل السنوية، عبارة تكلفة كل تشغيل مضروبة في عدد الدورات، أي:

$$Toc = F \times \frac{D}{Q} \quad 10-16$$

ب- مجموع تكاليف الاحتفاظ بالمخزون السنوية،

- طول مدة التشغيل عبارة عن كميات الإنتاج في كل تشغيل مقسمة على معدل كميات الطلب على المخزون في السنة، أي: $\frac{Q}{P}$ سنة، أي هي عبارة عن جزء من السنة، و منه فإن:

- عدد الوحدات التي تطلب خلال التشغيل هو: $D \times \frac{Q}{P}$ و من ذلك فإن:

- أكبر حجم للمخزون خلال الدورة هو:

$$M = Q - D \times \frac{Q}{P}$$

و بإخراج Q عامل مشترك يكون:

$$M = Q(1 - \frac{D}{P}) \quad 11-16$$

أما قيمة متوسط المخزون فهي عبارة عن متوسط المخزون مضروبا في تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون، أي:

$$C \times \frac{M}{2}$$

و بضرب هذه القيمة في تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة نجد:

- تكلفة الاحتفاظ بالمخزون و هي:

$$R \times C \times \frac{M}{2} \quad 12-16$$

عما أن $M = Q(1 - \frac{D}{P})$ و بالتعويض يمكن كتابة تكلفة الاحتفاظ بالمخزون كما يلي:

$$THc = C.R. \frac{Q}{2} (1 - \frac{D}{P}) \quad 13-16$$

و عليه فإن مجموع تكاليف التشغيل و الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة هي:

$$Tc = F. \frac{D}{Q} + C.R. \frac{Q}{2} (1 - \frac{D}{P}) \quad 14-16$$

و حتى تكون هذه الدالة في أدنى قيمة لها، نساوي مشتقتها الأولى بالنسبة للكميات الى الصفر، أي:

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q} = \frac{-F.D}{Q^2} + \frac{C.R}{2} (1 - \frac{D}{P}) = 0$$

و منه نجد:

$$\frac{F.D}{Q^2} = \frac{C.R}{2} (1 - \frac{D}{P}) \quad 15-16$$

بضرب الطرفين في الوسطين:

$$2F.D = Q^2 \frac{C.R}{2} (1 - \frac{D}{P}) \quad 16-16$$

من المعادلة 16-16 نجد:

$$Q = \sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1 - \frac{D}{P})}} \quad 17-16$$

للتذكير فإن:

كميات الإنتاج الاقتصادية المطلوب إنتاجها في التشغيل الواحدة	Q
معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة	D
تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون	C
التكلفة الثابتة لكل تشغيل	F
تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة	R
معدل كميات الإنتاج خلال السنة	P

بعد إيجاد كمية الإنتاج الاقتصادية يمكن إيجاد:

الطول الأمثل للدورة و هو:	$\frac{Q}{D}$ سنة (هو جزء من السنة)
العدد الأمثل للتشغيلات خلال السنة هو:	$\frac{D}{Q}$ تشغيل في السنة
الطول الأمثل لكل تشغيل هو:	$\frac{Q}{P}$ سنة
التكلفة الدنيا للتشغيل و الاحتفاظ عند الكمية الاقتصادية هي:	$Tc = F. \frac{D}{Q} + C.R. \frac{Q}{2} (1 - \frac{D}{P})$

مثال 16-3: نتج إحدى ورشات النجارة العامة طاولات الدراسة، حيث يقدر معدل الطلب السنوي بـ 8000 طاولة، في حين يصل معدل الإنتاج السنوي الى 10000 طاولة، فإذا كانت كل طاولة تكلف 1000 دج، ومعدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار من المخزون لمدة سنة يبلغ 0.25، و أن التكلفة الثابتة لتشغيل سلسلة الإنتاج تبلغ 1000 دج، المطلوب:

- ماهو الحجم الأمثل للإنتاج لكل تشغيل.
- ماهي قيمة التكلفة الدنيا للإنتاج و الاحتفاظ
- حدد الطول الأمثل للدورة
- العدد الأمثل للتشغيلات في السنة
- الطول الأمثل لكل تشغيل.

الجواب:

لدينا:

Q	كميات الإنتاج الإقتصادية المطلوب إنتاجها في التشغيل الواحدة
D	معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة
C	تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون
F	التكلفة الثابتة لكل تشغيل
R	تكلفة الاحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة
P	معدل كميات الإنتاج خلال السنة

بتطبيق المعادلة 16-17 و هي:

$$Q = \sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1 - \frac{D}{P})}}$$

نجد:

$$Q = \sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1 - \frac{D}{P})}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 8000}{1000 \times 0.25(1 - \frac{8000}{10000})}} = 565.68$$

يعني هذا أن الكميات الواجب إنتاجها عند كل تشغيل و التي تجعل تكاليف الإنتاج و التخزين في أدنى قيمة لها هي 566 طاولة تقريبا.

بالتعويض نجد بقية العناصر المطلوبة و هي كما يلي:

التكلفة الدنيا للتشغيل و الاحتفاظ عند الكمية الإقتصادية هي:	$T_c = F \cdot \frac{D}{Q} + C.R \cdot \frac{Q}{2} (1 - \frac{D}{P})$
و منه نجد:	دينار
	$T_c = 1000 \times \frac{8000}{565.68} + 1000 \times 0.25 \times \frac{565.68}{2} (1 - \frac{8000}{10000}) = 28284.24$
الطول الأمثل للدورة وهو:	$\frac{Q}{D} = \frac{565.68}{8000} = 0.070$ سنة أي ما يعادل 26 يوم.
العدد الأمثل للتشغيلات خلال السنة هو:	$\frac{D}{Q} = \frac{8000}{565.68} = 14.14$ أي ما يقارب 14 تشغيل في السنة
الطول الأمثل لكل تشغيل هو:	$\frac{Q}{P} = \frac{565.68}{10000} = 0.056568$ سنة أي ما يعادل 21 يوم.

تمارين

- تمرين 1: اعط تعريفًا للمخزون.
- تمرين 2: ماهي أهم وظائف المخزون.
- تمرين 3: ماذا يقصد بمخزون الأمان القبلي و مخزون الأمان البعدي؟.
- تمرين 4: حدد العناصر التي تكون تكاليف المخزون.
- تمرين 5: ماذا يقصد بنقطة إعادة الطلب؟.
- تمرين 6: ماذا يقصد بتكاليف إعادة التشغيل، ما هي العناصر التي تشملها.
- تمرين 7: قم بالإستنتاج الرياضي لكمية الطلب الاقتصادية.
- تمرين 8: قم بالإستنتاج الرياضي لكميات الإنتاج الاقتصادية.
- تمرين 9: مؤسسة لإنتاج الدراجات النارية تبلغ مبيعاتها السنوية 60.000 دراجة، إذا كانت تكلفة الدراجة الواحدة 30.000 دينار، و تكلفة الطلبية الواحدة 300 دينار، و معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة هي 25%، المطلوب:

- 1- أوجد كمية الطلب الاقتصادية.
- 2- ماهي التكلفة الدنيا التي تتحملها المؤسسة؟.
- 3- ماهو عدد الطلبات المثلى سنوياً؟
- 4- ماهو طول الدورة الواحدة؟

تمرين 10: إذا كان معدل الإنتاج للمؤسسة المشار إليها في التمرين السابق يصل الى 70.000 دراجة، و أن التكلفة الثابتة لتشغيل سلسلة الإنتاج لكل تشغيلية تبلغ 3000 دينار،
المطلوب:

- 1- ماهو الحجم الأمثل للإنتاج لكل تشغيلية؟
- 2- ماهي قيمة التكلفة الدنيا للإنتاج و الاحتفاظ؟

3- ماهو الطول الأمثل للدورة؟- ماهو العدد الأمثل للتشغيلات

سنوياً؟

تمرين 11: تستورد الشركة الوطنية للسيارات 50.000 سيارة سنوياً، تكلفة السيارة الواحدة 100.000 دينار، إذا كانت كل طلبية تكلفتها 500 دينار، و تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون 20%، المطلوب:

- 1- إيجاد كمية الطلب الاقتصادية
- 2- إيجاد قيمة التكلفة الدنيا للمخزون.
- 3- إيجاد الطول الأمثل للدورة.

تمرين 12: تسوق شركات المرييات 50.000 ألف تلفاز سنوياً، تكلفة التلفاز الواحد 2000 دينار، إذا كانت تكلفة كل طلبية تعدها الشركة 500 دينار، و تكلفة الاحتفاظ بما يعادل دينار واحد من المخزون 20 %، المطلوب:

- 1- أوجد كمية الطلب الاقتصادية.
- 2- أوجد الحد الأدنى للتكاليف التخزين.
- 3- أوجد الطول الأمثل للدورة.

تمرين 13: بافتراض أن تكلفة التلفاز الواحد المشار إليه في المثال السابق ارتفعت بنسبة 25%، المطلوب:

- 1- أوجد كمية الطلب الاقتصادية.
- 2- ما هي قيمة و نسبة التغير.
- 3- ناقش أثر ارتفاع التكلفة على كل من التكلفة الدنيا للمخزون و طول الدورة الأمثل.
- 4- أجب على نفس الأسئلة في حالة انخفاض تكلفة التلفاز الواحد بـ 10%.

المراجع

أولاً: باللغة العربية.

1. أحمد فهمي هيكل. مقدمة في بحوث العمليات و العلوم الإدارية. جامعة القاهرة. ط2. 1980
2. عامر الدجاني. طريقة المسار الحرج في إدارة المشاريع الإنشائية. دار المستقبل العربي. القاهرة. 1985.
3. د. موفق محمد العيسى. بحوث العمليات- تطبيقات و خوارزميات. دار الحامد. 1999.
4. د. محمد سليمان هدى. بحوث العمليات و اتخاذ القرارات في مجال النقل البحري. ط1. الهيئة المصرية العامة للكتاب. 1981.
5. د. حسين عطا غنيم. دراسات في بحوث العمليات. دار الثقافة العربية. 1997/1996
6. د. محمد محمد كعبور. أساسيات بحوث العمليات- نماذج و تطبيقات. منشورات كلية المحاسبة- غريان. 1992.
7. د. ريتشارد برونسون. ترجمة أ.د. حسن حسني الغباري. بحوث العمليات. سلسلة ملخصات شوم. دار ماكجر و هيل للنشر- الدار الدولية للنشر والتوزيع. 1988.
8. د. علي عبدالسلام المعزوي. بحوث العمليات في مجال الإنتاج و النقل. منشورات دار النهضة العربية. القاهرة. 1980.
9. مصطفى زهير. إدارة المشتريات و المخازن. دار النهضة العربية. بيروت 1976.
10. علي السكر. بحوث العمليات. القاهرة. 1972.
11. د. أحمد فؤاد علي. الاتجاهات الحديثة في الإدارة- البرمجة الخطية و بيرت. دار النهضة العربية للطباعة و النشر. بيروت. 1982.
12. د. هناء خير الدين. الإقتصاد الرياضي. مكتبة فضاء الشرق. جامعة القاهرة. 1987.

1	مقدمة.
3	مدخل، بحوث العمليات، مفهومها و تطورها
9	الفصل الأول: البرمجة الخطية مفهومها و تطبيقاتها
9	أولاً: مفهوم البرنامج الخطي.
10	أ- حالة التعظيم.
13	ب- حالة التدنئة.
15	ثانياً: مفهوم البرمجة الخطية.
16	ثالثاً: مجالات إستخدام البرمجة الخطية.
17	رابعاً: بناء البرنامج الخطي.
22	تمارين
25	الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي بيانياً.
25	أولاً: حالة التعظيم.
31	ثانياً: حالة التدنئة.
34	ثالثاً: حالات خاصة في الحل البياني.
34	1- تعدد الحلول.
36	2- حالة حياد أحد القيود.
36	3- حالة إستحالة الحل.
37	4- لا نهائية الدالة الاقتصادية.
38	تمارين
41	الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام-طريقة السمبليكس.
41	أولاً: الصيغة القانونية للبرنامج الخطي.
41	1- حالة التعظيم.
42	2- حالة التدنئة.
43	ثانياً: الصيغة المختلطة
43	ثالثاً: الصيغة النموذجية.
43	رابعاً: إيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول.
44	1- الحالة الأولى.
46	2- الحالة الثانية.
49	خامساً: إيجاد الحل في حالة التعظيم.
59	سادساً: إيجاد الحل في حالة التدنئة.
73	سابعاً: عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات.
73	1- إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر.
73	2- إذا كان أحد المتغيرات حراً.
78	ثامناً: حالات أخرى.
78	1- إنعدام وجود حل أمثل.
78	2- عدم محدودية الحل.
78	3- الإخلال.
79	تمارين
81	الفصل الرابع: الثنائية أو البرنامج المرافق
81	أولاً: ثنائية الصيغ القانونية.
89	ثانياً: ثنائية الصيغ المختلطة.
92	تمارين

13. عبدالحادي محمد قريطم. بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج.
دار الجامعات المصرية. 1968.

14. د. محمد سليمان هدى. بحوث العمليات و اتخاذ القرارات في مجال النقل
البحري. الهيئة المصرية العامة للكتاب. فرع الإسكندرية. 1981

15. محمد رشاد الحملاوي، أسامة فريد، حسين شرارة. إدارة الإنتاج
والعمليات. المكتبات بجامعة عين شمس 1992-1993
ثانياً: باللغة الفرنسية:

16. Gérard Desbazeille. Exercices et problèmes de recherche opérationnelle. DUNOD.
17. ROBERT FAURE. Précis de recherche opérationnelle. Imprimerie OFFSET AUBIN. 1978
18. KAUFMAN. A. BRUNET A. Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. T 1 et 2. Paris. DUNOD. 1964.
19. KAUFMAN. A. Invitation à la recherche opérationnelle. Paris. DUNOD 1979.
20. AZOULAY PIERE. Recherche opérationnelle de gestion. Paris. 1976
21. GH. OPRIS. PROGRAMMATION LINEAIRE. O.P.U. Algérie. 1983.

95	الفصل الخامس، برهنة الأعداد الصحيحة.
95	أولاً: المرحلة الأولى.
95	ثانياً: المرحلة الثانية.
101	تمارين
103	الفصل السادس، مسائل النقل - تصغير التكاليف -
103	أولاً: عرض المسألة.
105	ثانياً: تشكيل جدول مسائل النقل.
105	ثالثاً: الصيغة الرياضية لمسألة النقل.
110	رابعاً: طرق حل مسائل النقل.
110	1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
114	2- سيورة الحل الأمثل.
114	أ- طريقة التخطي.
122	ب- طريقة التوزيع المعدل.
125	3- طريقة التكلفة الدنيا.
129	4- طريقة فوجل.
135	خامساً: حالات خاصة في مسائل النقل.
135	1- عدم تساوي العرض مع الطلب.
136	2- حالة التفكك.
140	سادساً: الاستخدامات الأخرى لمسائل النقل.
141	تمارين
145	الفصل السابع، مسائل النقل - تعظيم الأرباح و العوائد -
145	أولاً: صيغة البرنامج الخطي للمسألة.
146	ثانياً: حل المسألة.
151	ثالثاً: حالات خاصة.
151	1- عدم تساوي العرض و الطلب.
151	2- حالة التفكك.
152	تمارين
155	الفصل الثامن، مسائل التخصيص
156	أولاً: طرح المشكل
157	طرق حل مسائل التخصيص
157	1- تخفيض التكاليف
157	أ- طريقة الحصر الاحتمالي
159	ب- الطريقة الهنغارية
165	ج- طريقة النقل
169	2- تعظيم الأرباح أو العوائد
169	أ- التعظيم بطريقة الحصر الاحتمالي
170	ب- التعظيم بالطريقة الهنغارية
172	ج- التعظيم بطريقة النقل
175	ثالثاً: حالة خاصة
179	تمارين
181	الفصل التاسع، نظرية القرارات
182	أولاً: مفهوم القرار و العوامل المؤثرة على اتخاذه

182	ثانياً: الطرق المتبعة لمواجهة مشاكل التسيير
183	ثالثاً: مراحل عملية اتخاذ القرارات
185	رابعاً: خطوات الطريقة العلمية
188	خامساً: حالات اتخاذ القرارات
188	1- اتخاذ القرارات في حالة التأكد
191	2- اتخاذ القرارات في حالة عدم التأكد
195	3- اتخاذ القرارات في ظروف المجازفة
198	4- شجرة القرارات
205	تمارين
209	الفصل العاشر، مدخل لنظرية البيانات
209	أولاً: مفاهيم عامة
214	ثانياً: التقديم المصغري للبيان
214	1- المصفوفة البوليانية
216	2- مصفوفة السعة
218	3- مصفوفة المساقط للبيان الموجه بدون دائرة
219	4- مصفوفة الأقواس
220	ثالثاً: تقديم البيان عن طريق جداول
220	1- جدول اللواحق
220	2- جدول السوابق
222	رابعاً: استخدامات نظرية البيانات
223	تمارين
225	الفصل الحادي عشر، نظرية الشجرة المثلى
225	أولاً: مفهوم الشجرة
225	ثانياً: الشجرة المثلى
225	ثالثاً: استخدامات نظرية الشجرة المثلى
225	رابعاً: حالة الشجرة الدنيا
226	1- خوارزمية كريسكال
228	2- خوارزمية سولان
228	خامساً: حالة الشجرة العظمى
235	1- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ كريسكال
235	2- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ سولان
235	تمارين
241	الفصل الثاني عشر، نظرية المصاراة المثلى
245	أولاً: طرح المسألة
245	ثانياً: حل مسائل المسارات المثلى
247	1- طريقة فورد
247	أ- البحث، عن أقصر مسار
247	ب- البحث عن أطول مسار
255	2- طريقة الفحص التتابعي للمسارات الجزئية
260	أ- حالة التدنئة
260	ب- حالة التعظيم
263	تمارين
265	

الجزء طبعه على مطابع
 كتيوان المطبوعات الجامعية
 الساحة المركزية - بن عكنون
 الجزائر

فهرس المواضيع

271	الفصل الثالث عشر، نظرية التدفق الأمثل - مورد فيلخرمون -
272	أولا: طرح المسألة
272	ثانيا: خوارزمية الحل
273	1- رسم البيان
274	2- البحث عن أمثل تدفق
286	تمارين
289	الفصل الرابع عشر، تحليل شبكات الأعمال - طريقة المصار الخرج -
290	أولا: أهمية و فوائد طريقة المسار الخرج
291	ثانيا: تخطيط و جدولة شبكات الأعمال
292	1 - مفاهيم أساسية
294	2- إعداد شبكة الأعمال
299	ثالثا: تحديد المسار الخرج
315	رابعا: تسريع المشاريع
315	1- جدول الموارد
315	2- مبادلة الوقت بالتكاليف
332	تمارين
335	الفصل الخامس عشر، أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات PERT
335	أولا: حساب مختلف الأوقات
341	ثانيا: احتمال تنفيذ المشروع خلال فترة زمنية معينة
344	تمارين
347	الفصل السادس عشر، التصيير الأمثل للمخزون
347	أولا: عموميات حول المخزون
348	ثانيا: إختصاصات إدارة المخازن
349	ثالثا: نظم التخزين
350	رابعا: وظائف المخزون
351	خامسا: أنواع المخزون
352	سادسا: تكاليف المخزون
353	سابعا: نموذج كمية الطلب الاقتصادية - نموذج ويلسون -
353	1- فرضيات النموذج
353	2- سلوك المخزون عبر الزمن
355	3- التحديد الرياضي لكمية الطلب الاقتصادية
361	ثامنا: نموذج الحجم الأمثل للإنتاج
361	1- تكاليف الإعداد للتشغيل
361	2- تكاليف الإحتفاظ بالمخزون
361	3- مستوى المخزون خلال الزمن
362	4- إيجاد كميات الإنتاج الاقتصادية
368	تمارين
371	قائمة المراجع
373	الفهرس